CBFM によるモーメント法の高速化

今野 佳祐, 陳　強, 澤谷 邦男 (東北大学大学院工学研究科),
瀬在 俊浩 (宇宙航空研究開発機構)

概要: 大規模問題を解析するための高速モーメント法の１つとして, CBFM(Characteristic Basis Function Method) が知られている. CBFM は反復処理を含まない解析法であるため, CG 法とは異なり Z 行列の条件数に計算時間が左右されないという利点を持つ. CBFM に要する計算時間はブロック数 M に大きく依存することが分かっているが, それらを最小にする M と総セグメント数 N の関係は明らかにされていない. 本報告では, CBFM の計算時間を最小にするような M を理論的に明らかにし, 数値解析でその妥当性を明らかにしたので報告する.

キーワード: モーメント法, CBFM

1.　まえがき

モーメント法 (Method of Moments, MoM) は有力な電磁界解析法の１つとして知られている [1], [2]. モーメント法では, アンテナや散乱体上の電流を求める問題を, N 個に分割したアンテナや散乱体の各セグメント上における未知の電流係数を求める問題に置換する. そして, 未知の電流係数を求めるために, 電界積分方程式を離散化して得られる行列方程式を解く. しかしながら, 逆行列を求めるための計算時間が $O(N^3)$ となってしまい, 大規模な問題をモーメント法で解析するには高速化が不可欠である.

モーメント法の高速化を図るために, これまでに様々な手法が提案されてきた. 特に, 共役勾配 (Conjugate Gradient, CG) 法などの反復解法に基づく手法が盛んに研究されている [3]-[6]. 反復解法は, 適当に与えた近似解を更新して厳密解に近付けてゆく手法であるが, 反復処理１回当たりの計算時間が $O(N^2)$ であるため, 反復回数が少なければ逆行列を求めるよりも早く行列方程式を解くことができる. しかしながら, 一般的に大規模な問題の Z 行列は悪条件であることが多い. 悪条件な Z 行列を有する行列方程式を反復解法で解く場合, 必要な反復回数は N に比例することもあり, 反復解法は必ずしも高速にならないことが知られている [7].

そこで, 反復解法に依らずにモーメント法の高速化を図る手法として, 特性基底関数法 (Characteristic Basis Function Method, CBFM) が提案されてきた [8]. CBFM ではまず, 解析モデルを M 個のブロックに, Z 行列を対応する M^2 個のブロック行列方程式に分割する. そして, ブロック行列方程式を解いて得られる M^2 個の解にガラーキン法を適用し, $N \times N$ の行列方程式を $M^2 \times M^2$ の行列方程式に圧縮した後に解き, 解を得る. 圧縮後の行列サイズを抑えれば逆行列を求めることができるため, N が大きな問題でも反復解法によらずに解を得られるという利点がある. これまで, CBF の生成方法に関する検討 [9]-[11] や多層化による高圧縮率の実現 [12]-[15] など, CBFM に関する様々な研究が行われてきた. しかしながら, CBFM において最小の計算時間を与える M と N の関係についての検討は見られない.

本報告では, CBFM において最小の計算時間を与える M と N の関係を理論的に導出し, 得られた関係の妥当性を数値解析によって確かめたので報告する.

2.　CBFM

2.1　原理

図 1 に示すような板状アンテナの解析を例にとって, CBFM の原理を説明する. CBFM では, まず図 1 に示すように解析モデルを M 個のブロックに分割する. そして, 解析モデルの分割に対応するように Z 行列も M^2 個のブロックに分割し, 電圧ベクトルと電流ベクトルはどちらも M 個のブロックに分割する. なお, 図 1 において, N は総セグメント数, M は解析モデルを分割したブロック数, K は各ブロック中におけるセグメント数, K_o は後述するブロック間のオーバーラップセグメント数である. また, $\mathbf{Z}_{ik}^{blo}$ は i 番目のブロックと k 番目のブロック間の $K \times K$ 相互インピーダンス行列, $\mathbf{V}_i^{blo}$ と $\mathbf{I}_i^{blo}$ はそれぞれ K 元のブロック電圧・電流ベクトルである. 役割は後述するが, オーバーラップセグメントを含んだ拡張ブロック (Extended block) も特性基底関数 (Characteristic Basis Function, CBF) を求める過程で用いられ, 通常のブロック行列と区別するために図中では上付き文字の $eblo$ が付けられている.

さて, CBFM では M 個の CBF に重み係数を乗じたものの和によって, 各ブロック中に流れる電流を以下のように表現する.

$$\mathbf{I}_i^{blo} = \sum_{k=1}^{M} \alpha_{(i,k)} \mathbf{J}_{(i,k)}^{blo} \qquad i = 1, 2, ..., M \tag{1}$$

ここで, $\mathbf{J}_{(i,k)}^{blo}$ は第 i ブロックにおける k 番目の CBF であり, $i = k$ のとき Primary basis, $i \neq k$ のとき Secondary basis と呼ばれる. また, $\alpha_{(i,k)}$ はそれぞれの CBF に乗じる重み係数である. $\mathbf{J}_{(i,k)}^{blo}$ は, 第 i ブロックにおける電流のうち, 第 k ブロックの寄与による成分を表すという物理的な意味を持ち, $\alpha_{(i,k)}$ は対応する CBF の寄与の大きさを示すものと解釈できる. 各ブロックを流れる電流を (1) 式のように表現することは, N 個の電流係数を求めるという元の問題を, M^2 個の CBF 及びその重み係数を求める問題に変換したことを意味しており, 以下では CBF と重み係数を求めて解を得るまでの手順を示す.

まず, 全ブロックの Primary basis $\mathbf{J}_{(i,i)}^{blo}$ を求める. Primary basis は, 当該ブロック内に印加した電圧によって当該ブロック内に生じる電流を表しており, 一般的には最も寄与の大きな CBF であることが多い. 従って, Primary

2011 年 6 月 21 日
東北大学　電気・情報系 103 会議室

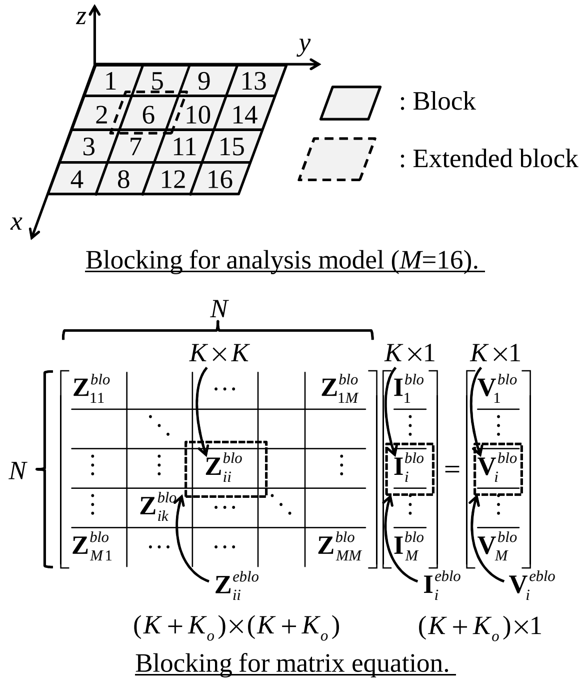


図 1: CBFM による板状アンテナの解析.

basis の精度は最終的な解の精度を左右すると考えられるが, ブロック行列方程式を解いて得られる Primary basis は, ブロックの周囲にあるセグメントとの連続性を無視することによって生じる不要なエッジ効果を含んでしまうことがあり, 必ずしも精度は良くない. そこで, 不要なエッジ効果を除去した Primary basis を得るために, 当該ブロック周囲にある K_o 個のセグメントをオーバーラップセグメントとして導入した $(K+K_o)\times(K+K_o)$ の拡張ブロック行列方程式 (2) を解く.

$$\mathbf{Z}_{ii}^{eblo}\mathbf{J}_{(i,i)}^{eblo}=\mathbf{V}_{i}^{eblo}\qquad i=1,2,...,M \tag{2}$$

そして, (2) 式を解いて得られる $(K+K_o)$ 元の解ベクトル $\mathbf{J}_{(i,i)}^{eblo}$ のうち, K_o 個のオーバーラップセグメント部分に相当する成分を棄却し, 残り K 個の成分を Primary basis として保存する. オーバーラップセグメントはブロック間の電気的なつながりを担保し, 不要なエッジ効果を除去して Primary basis の精度を高める効果がある. その一方で, オーバーラップセグメント数を大きくしすぎると計算時間が増大するという欠点もある. 従って, オーバーラップセグメント数 K_o は精度と計算時間の両方に関わる重要なパラメータであると言える. なお, (2) 式を解く際に求めた逆行列は, Secondary basis を求める箇所で必要になるため, ハードディスクに出力して保存しておく.

次に, Secondary basis を求める. Secondary basis は, 他のブロックに印加した電圧によって当該ブロック内に生じる電流を表しており, 以下のようなブロック行列方程式を解いて求める.

$$\mathbf{Z}_{ii}^{eblo}\mathbf{J}_{(i,k)}^{eblo}=\mathbf{V}_{(i,k)}^{eblo}\quad where\quad \mathbf{V}_{(i,k)}^{eblo}=-\mathbf{Z}_{ik}^{eblo'}\mathbf{J}_{(k,k)}^{blo'} \tag{3}$$

$$(k=1,2,...,i-1,i+1,...,M)$$

ここで, $\mathbf{Z}_{ik}^{eblo'}$ は $\mathbf{Z}_{ik}^{eblo}$ 中の $(K+K_o)\times K'$ ブロック行列であり, $\mathbf{J}_{(k,k)}^{blo'}$ は Primary basis$\mathbf{J}_{(k,k)}^{blo}$ 中の K' 成分からなるベクトルである. なお, 第 i ブロックと第 k ブロック間のオーバーラップセグメント数を K_o^{ik} とすると, $K'=(K-K_o^{ik})$ である. Primary basis を求めるときと同様に, (3) 式を解いて得られる $(K+K_o)$ 元の解ベクトル $\mathbf{J}_{(i,k)}^{eblo}$ のうち, K_o 個のオーバーラップセグメント部分に相当する成分を棄却し, 残り K 個の成分を Secondary basis として保存する. このようにして各グループ毎に M 個, 計 M^2 個の CBF が得られるが, これらは必ずしも正規直交基底とはならない. そこで最後に, 得られた CBF に Gram-Schmidt の正規直交化法を適用し, CBF の直交性を高める.

次に, 各 CBF の重み係数 $\alpha_{(i,k)}$ を求めるため, CBF を用いて元の行列方程式を以下のように変換する.

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\alpha_{(i,k)}\mathbf{u}_{(i,k)}=\mathbf{V} \tag{4}$$

$$(\mathbf{u}_{(i,k)}=[[\mathbf{Z}_{1i}^{blo}\mathbf{J}_{(i,k)}^{blo}][\mathbf{Z}_{2i}^{blo}\mathbf{J}_{(i,k)}^{blo}]\cdots[\mathbf{Z}_{Mi}^{blo}\mathbf{J}_{(i,k)}^{blo}]]^T)$$

そして, (4) 式の両辺と $\mathbf{u}_{(q,l)}^{*}$ との内積を取るというガラーキン法を用い, 元の $N\times N$ 行列方程式を $M^2\times M^2$ に圧縮する. 圧縮した行列方程式のサイズは小さく, Gauss-Jordan 法などを用いて逆行列を計算して $\alpha_{(i,k)}$ を求めることができる. 最後に, 得られた重み係数と CBF を (1) 式に代入することで, 元の行列方程式の解が求まる.

2.2 最適なブロック数 M の導出

ここでは, CBFM の計算時間を最小にするようなブロック数 M を N の関数として導出する. なお, ブロック中に含まれるセグメント数は一様であるとし, オーバーラップセグメント数は無視している. まず, CBFM の計算時間において, M の増加に対して最も高速で減少するのは Primary basis の演算で, N^3/M^2 に比例する. また, M の増加に対して最も高速に増加するのは Z 行列の圧縮演算であり, M^4N に比例する. これらの和の極値を与えるような M と, そのときの計算時間は以下のようになる.

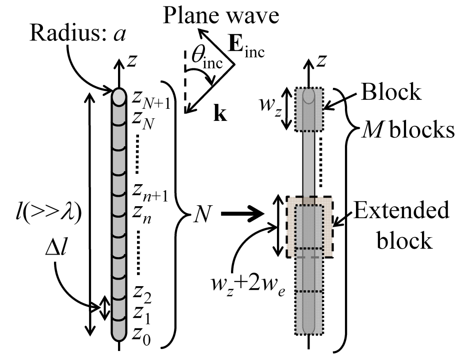
$$\begin{aligned}\text{CPU time}&\propto N^3/M^2+M^4N\\&=N^{7/3}\quad where\quad M\approx 0.9N^{1/3}\end{aligned} \tag{5}$$

従って, $M\approx 0.9N^{1/3}$ としたとき, CBFM の計算時間は最小の $O(N^{7/3})$ となる.

3. 数値解析

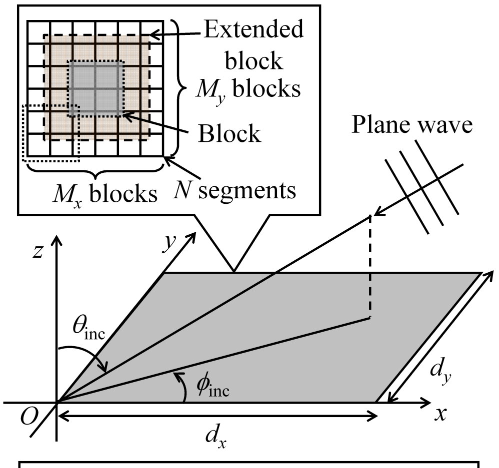
図 2 と 3 に解析モデルを示す. オーバーラップセグメント数 K_o は, ブロック各辺の両側を w_e ずつ拡張した範

囲に含まれるセグメント数と定義した．また本報告では，散乱問題を取り扱うこととする．



Number of total segments	: N
Number of blocks	: M
Number of segments in a block	: K
Number of overlap segments	: K_o
Size of dipole antenna	: l
Length of segment	: $2\Delta l$
Radius of wire segment	: a
Size of block	: w_z
Size of extended block	: w_z+2w_e
Incident angle of plane wave	: θ_{inc}

図 2: ロングダイポールアンテナ.



Number of total segments	: N
Number of blocks	: $M=M_xM_y$
Number of segments in a block	: K
Number of overlap segments	: K_o
Size of planar conductor	: $d_x \times d_y$
Length of segment	: $2\Delta l$
Radius of wire segment	: a
Size of block	: $w_x \times w_y$
Size of extended block	: $(w_x+2w_e) \times (w_y+2w_e)$
Incident angle of plane wave	: $(\theta_{inc}, \phi_{inc})$

図 3: 板状アンテナ.

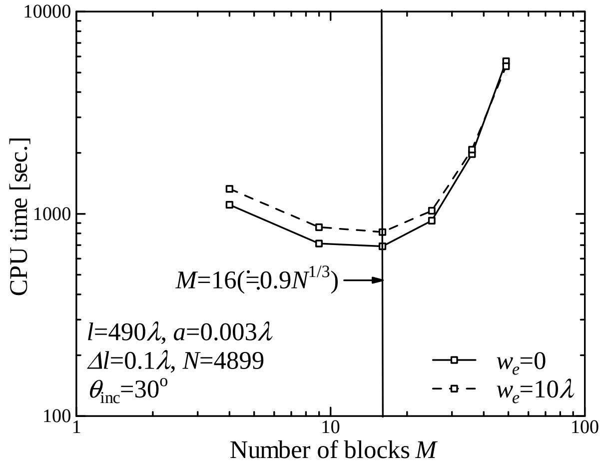


図 4: ブロック数 M と計算時間の関係 (ロングダイポールアンテナ).

3.1 ブロック数 M と計算時間との関係

図 4 及び 5 に, 総セグメント数 N を固定したときの CBFM におけるブロック数 M と計算時間の関係を各モデル毎に示す．これらの図から分かるように, $M = 16(\approx 0.9N^{1/3})$ のとき, CBFM の計算時間がいずれのモデルでもほとんど最小値になっていることが分かる．従って, 導出した $M = 0.9N^{1/3}$ が CBFM における最小の計算時間を与える値だということが示された．

また, 図からはオーバーラップセグメント数が計算時間に与える影響も読み取ることができる．ロングダイポールアンテナの場合は, $w_e = 10\lambda$ とかなり大きな w_e を与えても計算時間の大きさや M に対する振る舞いはそれほど変わらなかった．これはロングダイポールアンテナが 1 次元的なセグメント分布を有しており, w_e を大きくしても K_o はそれほど大きくならなかったためと考えられる．板状アンテナの場合は, $w_e = 1\lambda$ のときにはかなり計算時間が増大している．これは板状アンテナが 2 次元的なセグメント分布を有しており, w_e を大きくすると K_o も急速に大きくなるためと考えられる．

3.2 圧縮率及び拡張幅と精度との関係

CBFM で得られる解の精度は, Z 行列をどの程度圧縮したか, 及びブロック間の電気的な連続性を CBF を求める際にどの程度考慮したかで決まる．そこで, 元の Z 行列のサイズと圧縮後の Z 行列のサイズの比 $R_C = M^2/N$ を圧縮率として定義し, R_C 及び拡張幅 w_e と精度との関係を確かめる．CBFM で得られる解の精度は, 以下の式で評価する．

$$\epsilon^{CBFM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{P} |E^{GJ}(\theta_i) - E^{CBFM}(\theta_i)|^2}{\sum_{i=1}^{P} |E^{GJ}(\theta_i)|^2}} \qquad (6)$$

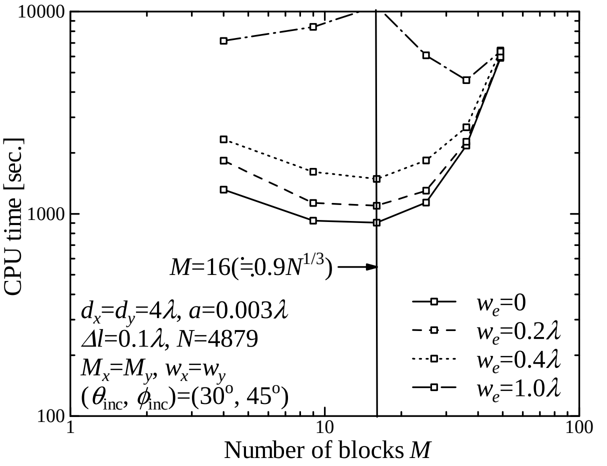


図 5: ブロック数 M と計算時間の関係 (板状アンテナ).

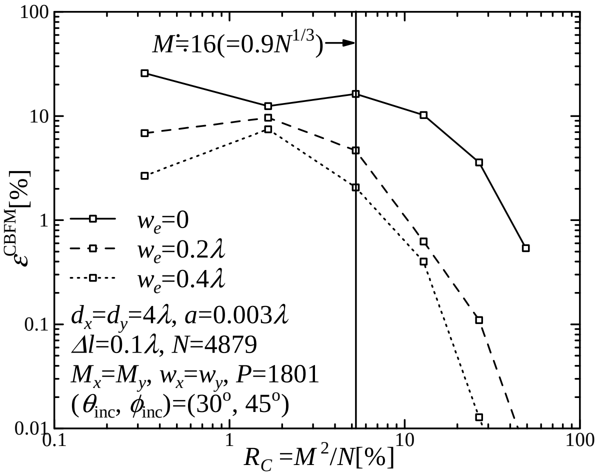


図 7: 圧縮率 R_C 及び拡張幅 w_e と精度との関係 (板状アンテナ).

ここで, $E^{GJ}(\theta_i)$ と $E^{CBFM}(\theta_i)$ はそれぞれ Gauss-Jordan 法, CBFM によって得られた電流から計算した θ_i 方向の散乱電界であり, θ_i は電界の方向, P は電界の点数である. 今回は, 入射平面波を定義した面での散乱電界を誤差評価に用いた.

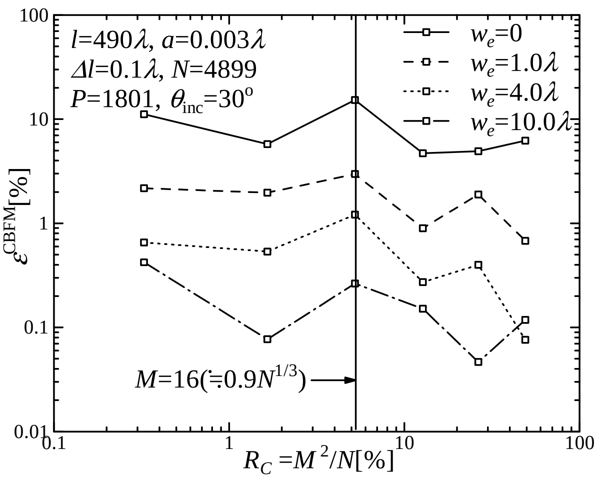


図 6: 圧縮率 R_C 及び拡張幅 w_e と精度との関係 (ロングダイポールアンテナ).

数値解析結果を図 6 と 7 にそれぞれ示す. ロングダイポールアンテナでは, 圧縮率 R_C が小さい場合でも, 拡張幅 w_e を大きくすることで解の精度を改善できていることが分かる. 一方の板状アンテナでは, 圧縮率 R_C を小さくすると, 拡張幅 w_e を大きくしても解の精度はあまり良くならない. 以上の結果に基づき, CBFM によって得られる解の精度と圧縮率 R_C 及び拡張率 w_e との関係を考察する.

CBFM は, 元々の N 個ある基底関数のいくつかを落とし, 残りの M^2 個の基底関数で近似解を求める手法だと解釈できる. その観点から言えば, 圧縮率 R_C は元々の基底関数の数に対する残した基底関数の割合を表し, 拡張幅 w_e は残す基底関数の質を左右する値だと考えられる. 残す基底関数をどのように選んでも, 残した基底関数で表現できる最良の近似解に含まれる誤差は基底関数を落とした分だけ大きくなるため, CBFM によって実現できる近似解の精度は, 圧縮率 R_C を小さくするほど一般的には下がると考えられる. しかしながら, 単純な電流分布を持つ問題など, 少ない数の基底関数でも十分に近似解が精度良く表現できる場合は, 残す基底関数の質を w_e によって高めることで解の精度も改善できる.

ロングダイポールアンテナは比較的単純な電流分布を持ち, 少ない数の基底関数でも近似解を精度良く表現できる. 従って, 圧縮率 R_C を小さくしても, 拡張幅 w_e によってブロック間における電流の連続性を担保し, 残す基底関数の質を改善すれば, 解の精度も改善できると考えられる. その一方で, 電流経路が複数存在する板状アンテナは, 解を精度良く表現するために要する基底関数の数が多く, 圧縮率 R_C を小さくしすぎると, 解を精度よく表現するために必要な基底関数の数自体が不足してしまう. 従って板状アンテナでは, 圧縮率 R_C を小さくしすぎると, 拡張幅 w_e を大きくしても解の精度を上げることができないと考えられる.

3.1 及び 3.2 の検討から, w_e によって精度が調整できるロングダイポールモデルについては, ブロック数を計算時間が最小になるように $M \approx 0.9N^{1/3}$ とし, $w_e = 10\lambda$ とすれば, 最小に近い計算時間で高い精度の解が得られると考えられる. また, 圧縮率 R_C が解の精度を左右する板状アンテナについては, $M \approx 0.9N^{1/3}$ よりも若干 M を大きくし, $w_e = 0.2\lambda$ とすれば, こちらも最小に近い計算時間で高い精度の解が得られると考えられる. 以後の数値解析では, このパラメータを採用する.

3.3 最適化済 CBFM と反復法との比較検討

ここでは, パラメータの最適化を行った CBFM の有効性を明らかにし, Gauss-Jordan 法によって得られた厳密

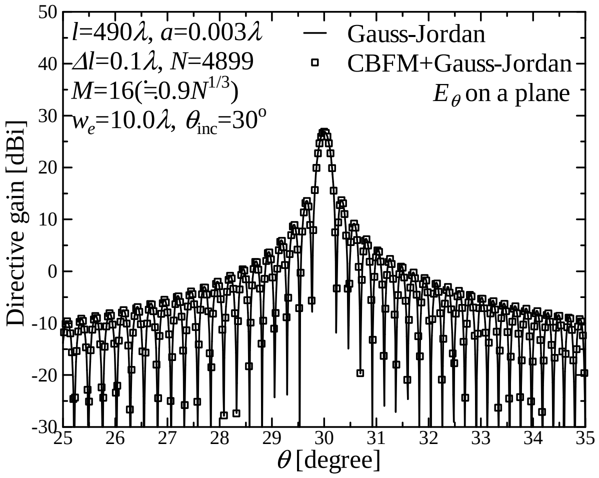


図 8: 散乱パターン (ロングダイポールアンテナ).

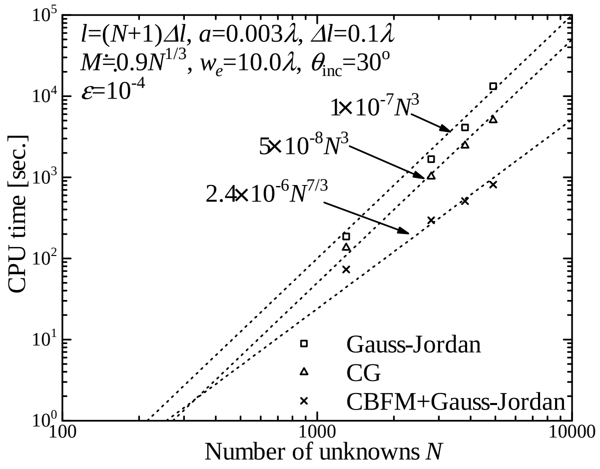


図 10: 計算時間 (ロングダイポールアンテナ).

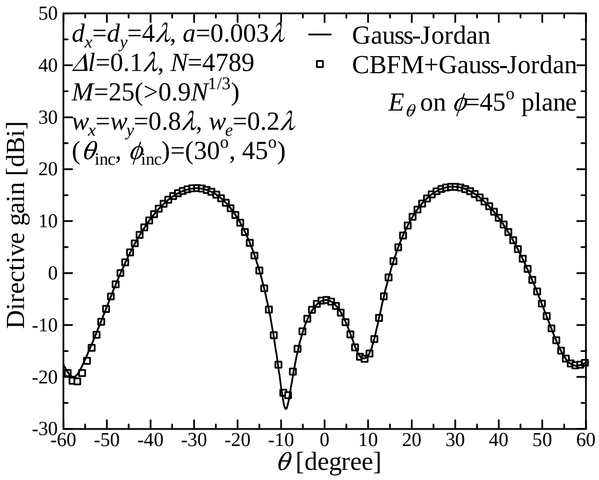


図 9: 散乱パターン (板状アンテナ).

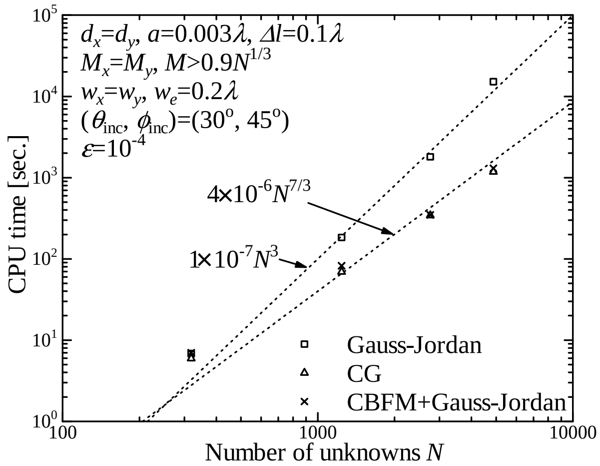


図 11: 計算時間 (板状アンテナ).

解と比較する. また, CBFM と CG 法による解析に要する計算時間も比較検討する. なお, CG 法の収束判定は相対残差 ϵ を用いて行い, $\epsilon = 10^{-4}$ とする.

図 8 及び 9 に, 最適化済 CBFM によって得られた散乱パターンを示す. 得られた散乱パターンは, Gauss-Jordan 法によって得られた散乱パターンとよく一致しており, CBFM によって解が正しく得られていることが分かる.

図 10 及び 11 に, 最適化済 CBFM の計算時間と, 比較のための Gauss-Jordan 法及び CG 法の計算時間を併せて示す. ロングダイポールアンテナは, CBFM による計算時間のオーダーは $O(N^{7/3})$ であり, Gauss-Jordan 法及び CG 法の $O(N^3)$ よりも小さい. この解析モデルは, CG 法の反復回数が N に比例する悪条件問題であることが知られており, CG 法では Gauss-Jordan 法と比較して計算時間を削減することはできない [7]. しかしながら, CBFM は反復解法を用いないため, 計算時間を削減することができている. 一方, 板状アンテナは悪条件問題ではないためか, CBFM による計算時間は CG 法とそれほど変わらない. 以上のことから, CBFM は悪条件問題の解析に必要な計算時間を削減するために特に有効な手法であると考えられる.

4. むすび

本報告では, 高速なモーメント法の 1 つである CBFM における計算時間を最小にするようなブロック数 M と N の関係を理論的に導出した. そして, 得られた M の値が最小の計算時間を与える M であることを数値解析によって明らかにした. また, 圧縮率 R_C 及びブロック拡張幅 w_e と CBFM によって得られる解の精度との関係も数値的に明らかにした. 最後に, ブロック数 M と拡張幅 w_e を最適化した CBFM が, 悪条件問題に有効であることを明らかにした. 今後は, 誘電体を含むモデルを解析するためのブロックモーメント法に CBFM を適用する予定である.

参考文献

[1] R.F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York, Macmillan, 1968.

[2] J.H. Richmond and N.H. Greay, “Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles,” IEEE Trans. Antennas and Propag., vol.23, no.5, pp.412-414, May 1975.

[3] Q. Chen, Q. Yuan, and K. Sawaya, “Fast algorithm for solving matrix equation in MoM analysis of large-scale array antennas,” IEICE Trans. Commun., vol.E85-B, no.11, pp.2482-2488, Nov. 2002.

[4] Q. Chen, Q. Yuan, and K. Sawaya, “Convergence of SOR in MoM analysis of array antenna,” IEICE Trans. Commun., vol.E88-B, no.5, pp.2220-2223, May 2005.

[5] T.K. Sarker and S.M. Rao, “The application of the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic scattering from arbitrarily oriented wire antennas,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.32, no.4, pp.398-403, April 1984.

[6] T.K. Sarker, “The conjugate gradient method as applied to electromagnetic field problems,” IEEE Antennas Propagation Society Newsletter, vol.28, no.4, pp.4-14, Aug. 1986.

[7] K. Konno, Q. Chen, and K. Sawaya, “Quantitative evaluation for computational cost of CG-FMM on typical wiregrid models,” IEICE Trans. Commun., vol.E93-B, no.10, pp.2611-2618, Oct. 2010.

[8] V.V.S. Prakash and R. Mittra, “Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations,” Microw. Opt. Technol. Lett., vol.36, no.2, pp.95-100, Janu. 2003.

[9] G. Tiberi, M. Degiorgi, A. Monorchio, G. Manara, and R. Mittra, “A class of physical optics-SVD derived basis functions for solving electromagnetic scattering problems,” Proc. IEEE AP-S Int. Symp., pp. 143-146, July 2005.

[10] M. Degiorgi, G. Tiberi, A. Monorchio, G. Manara, and R. Mittra, “An SVD-based method for analyzing electromagnetic scattering from plates and faceted bodies using physical optics bases,” Proc. IEEE AP-S Int. Symp., pp. 147-150, July 2005.

[11] E. Lucente, A. Monorchio, and R. Mittra, “An iteration-free MoM approach based on excitation independent characteristic basis functions for solving large multiscale electromagnetic scattering problems,” IEEE Trans. Antennas and Propag., vol.56, no.4, pp. 999-1007, April 2008.

[12] C. Delgado, F. Catedra, and R. Mittra, “A numerically efficient technique for orthogonalizing the basis functions arising in the solution of electromagnetic scattering problems using the CBFM,” Proc. IEEE AP-S Int. Symp., pp. 3608-3610, July 2007.

[13] C. Delgado, M.F. Catedra, and R. Mittra, “Efficient multilevel approach for the generation of characteristic basis functions for large scatters,” IEEE Trans. Antennas and Propag., vol.56, no.7, pp.2134-2137, July 2008.

[14] C. Delgado, E. Garcia, F. Catedra, and R. Mittra, “Generation of characteristic basis functions defined over large surfaces by using a multilevel approach,” IEEE Trans. Antennas and Propag., vol.57, no.4, pp. 1299-1301, April 2009.

[15] J. Laviada, F. Las-Haras, M.R. Pino, and R. Mittra, “Solution of electrically large problems with multilevel characteristic basis functions,” IEEE Trans. Antennas and Propag., vol.57, no.10, pp. 3189-3198, Oct. 2009.