

第 519 回伝送工学研究会

CG-FMM による
モーメント法的高速化に関する一検討

平成 21 年 6 月 23 日

今野 佳祐, 陳 強, 澤谷 邦男

東北大学大学院工学研究科 電気通信工学専攻

CG-FMM によるモーメント法の高速化に関する一検討

今野 佳祐[†] 陳 強[†] 澤谷 邦男[†][†] 東北大学大学院 工学研究科 電気通信工学専攻 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05

E-mail: †{konno, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし モーメント法はアンテナや散乱体の有力な数値解析法の 1 つであるが、セグメント数 N が増加すると、計算時間は N^3 に比例し、計算機メモリが N^2 に比例して増加してしまう問題点がある。本報告では、大規模アンテナの電磁界数値解析の計算時間と計算機メモリを減らすことを目的として、CG 法 (共役勾配法) 及び FMM (高速多重極法) を 4 つの大規模アンテナの数値解析に適用し、その効果を検討している。

キーワード モーメント法, 高速多重極法, 共役勾配法.

A Study for Fast Method of Moments Using CG-FMM

Keisuke KONNO[†], Qiang CHEN[†], and Kunio SAWAYA[†][†] Electrical and Communication Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University
Aramaki Aza Aoba 6-6-05, Aoba-ku, Sendai, 980-8579, Japan

E-mail: †{konno, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract Method of moments (MoM) is one of the powerful techniques for numerical analysis of antennas and scatterers. However, CPU time and computer memory, which are proportional to $O(N^3)$ and $O(N^2)$, respectively, increase rapidly when number of segments N increases. In this report, the conjugate gradient (CG) method and the fast multipole method (FMM) are applied to MoM analysis of these large-scale antenna models, and the CPU time and computer memory are investigated.

Key words Method of moments (MoM), Fast multipole method (FMM), Conjugate gradient (CG).

1. ま え が き

アンテナの電磁界解析手法の 1 つとしてモーメント法 (Method of Moments: MoM) が挙げられる [1], [2]. モーメント法は、導体表面上で成り立つ電磁界の境界条件から得られる積分方程式を離散化し、行列方程式に変換してこれを解き、導体表面を流れる未知の電流を求める手法である。従来は、行列方程式 $[V] = [Z][I]$ を解いて未知の電流ベクトル $[I]$ を求める際にガウス消去法や掃き出し法などの直接法が用いられていた。しかし、 $N \times N$ の行列方程式を直接法を用いて解くと計算時間とメモリがそれぞれ N^3 と N^2 に比例して増加する。そのため、大規模な構造にモーメント法を適用するには、計算の高速化及び必要なメモリの低減が不可欠である。

この課題を克服する手法として、行列方程式の解法に CG (Conjugate Gradient) 法 [3] [4] を用い、CG 法における行列・ベクトル積の計算に FMM (Fast Multipole Method; 高速多重極法) を用いる CG-FMM [5]- [7] や、CG 法中の行列・ベクトル積の計算を高速フーリエ変換で高速化した CG-FFT (Conjugate Gradient-Fast Fourier Transform) [19], Z 行列の遠方界成分を周期的に配置した点状基底関数を用いて計算する AIM (Adaptive

Integral Method) [20]- [23] などが提案された。一般に、CG-FMM の 1 ステップあたりの計算時間及び必要なメモリはどちらも $N^{1.5}$ にそれぞれ比例するが、 N が大きくなれば効率は良くなる。また、CG-FFT の 1 ステップあたりの計算時間は $N \log N$ で、必要なメモリは N に比例するが、周期構造にしか適用できないという欠点がある。さらに、AIM では 1 ステップあたりの計算時間及び必要なメモリはそれぞれ $N^\alpha \log N$, $N^\alpha (1 < \alpha < 1.5)$ に比例するが、解析モデルを様な長方形格子で分割すること (階段近似) による誤差が大きい。

これらの手法の中でも CG-FMM に関しては様々な研究がなされ、改良や大規模問題の解析が行われてきた。CG-FMM に分割統治法の考え方を応用して多層化した MLFMA (Multi-Level Fast Multipole Algorithm) [8]- [18] に代表される手法は、飛行機 [9] やレンズ [16] などの大規模問題の解析に用いられてきた。現在までに、並列コンピュータ用のアルゴリズムの開発 [13]- [15] や低周波での破綻を克服する試み [17], [18] をはじめとして、様々な研究が行われてきた。しかし、過去の研究は CG-FMM の改良及び大規模問題の解析に終始しているため、解析モデル及び種々のパラメータと CG-FMM の解析精度・計算時間及び必要なメモリの相互関係が十分明らかにされていない。

本報告では、4つの解析モデルにCG-FMMを適用し、各モデルに対する計算量及び使用メモリを明らかにする。

2. 数値解析の原理

2.1 モーメント法

完全導体のアンテナや散乱体に外部から電界 \mathbf{E}^{inc} が入射した場合を考える。完全導体表面の電界の接線成分は

$$\left[\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \right]_t = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } S \quad (1)$$

の境界条件を満たす。従って、導体表面 S の面電流密度 \mathbf{J}_s に対する電界積分方程式は

$$\mathbf{E}_t^{inc}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \iint_S [\bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}')]_t d\mathbf{r}' \quad (2)$$

である。ここで、 \mathbf{E}^s は導体表面を流れる未知の面電流密度 \mathbf{J}_s によって生じる散乱電界である。また、 \mathbf{r} と \mathbf{r}' はそれぞれ観測点及び波源の位置ベクトルである。また、添字 "t" は導体表面の接線方向を表し、 $\bar{\bar{G}}_0$ は自由空間のダイアディックグリーン関数であり、

$$\bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\frac{\nabla\nabla}{k_0^2} + \bar{\bar{I}} \right) \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3)$$

で表される。ここで、 $\bar{\bar{I}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}$ は単位ダイアドである。

モーメント法では、(2)式の電界積分方程式を解くために、まず未知の電流密度 \mathbf{J}_s を基底関数 (展開関数) $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$ を用いて

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \quad (4)$$

と展開する [1], [24]。ここで、 I_n は未知の電流係数である。次に、(4)式を(2)式に代入して、試行関数 (重み関数) \mathbf{w}_m を導入することにより、(2)式の積分方程式を連立方程式

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5)$$

に変形する。ここで、電圧係数 V_m は入射電界 \mathbf{E}^{inc} と試行関数との内積であり、

$$V_m = \iint_S \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (6)$$

で与えられる。また、(5)式の Z_{mn} は

$$Z_{mn} = j\omega\mu_0 \iint_S \iint_S \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (7)$$

で与えられる。 Z_{mn} は面電流 $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$ と $\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$ の自己インピーダンス ($m = n$) あるいは相互インピーダンス ($m \neq n$) である。(6), (7)式を数値的に求めて、(5)式を数値的に解くことにより、未知の電流係数 I_n が求められる。また、 I_n が求められれば、(4)式より面状導体の面電流密度 \mathbf{J}_s が求められるので、導体からの散乱電磁界が計算できる。なお、(7)式から分かるように、自己・相互インピーダンス Z_{mn} の表示式には2重の面積分、すなわち4重積分が含まれている。

本報告では、基底関数及び試行関数の両方に区分的正弦関数を用いるRichmondのモーメント法 (変分法 [25]-[27] と等価なガラーキン法の一つ) を採用し、細線近似 [28] を用いることにより、(7)式の4重積分を2重積分で近似する。(5)式を数値的に解く手法としてCG法を利用する。また、CG法における行列・ベクトル積の計算を高速化し、メモリを削減する手法としてFMMを利用する。

2.2 CG 法

CG法によりモーメント法の行列方程式 $[Z][I] = [V]$ を解くアルゴリズムは以下の通りである [29], [31]。

電流ベクトル $[I_1, I_2, \dots, I_N]^t$ の初期値を \mathbf{I}_0 として、残差ベクトル及び解の修正ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{R}_0 = Z\mathbf{I}_0 - \mathbf{V}$$

$$\mathbf{P}_1 = -Z^\dagger \mathbf{R}_0$$

より求める。次に、以下の反復処理を行う。

$$\alpha_i = -\frac{\langle Z\mathbf{P}_i, \mathbf{R}_{i-1} \rangle}{\|Z\mathbf{P}_i\|^2} = \frac{\|Z^\dagger \mathbf{R}_{i-1}\|^2}{\|Z\mathbf{P}_i\|^2}$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{R}_i = Z\mathbf{I}_i - \mathbf{V} = \mathbf{R}_{i-1} + \alpha_i Z\mathbf{P}_i$$

$$\beta_i = \frac{\|Z^\dagger \mathbf{R}_i\|^2}{\|Z^\dagger \mathbf{R}_{i-1}\|^2}$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = -Z^\dagger \mathbf{R}_i + \beta_i \mathbf{P}_i$$

ここで、 \mathbf{P}_i 及び \mathbf{R}_i は解の修正ベクトルと残差ベクトルであり、 α_i と β_i はそれぞれ電流ベクトル \mathbf{I}_i と修正ベクトル \mathbf{P}_i の修正係数 (重み) である。CG法では、反復処理1回の計算量は Z 行列とベクトルの積を計算する部分の $O(N^2)$ であり、反復回数が N と無関係であれば、インピーダンス行列 $[Z]$ の逆行列を求める場合の $O(N^3)$ に比べて計算量を削減できる。しかしながら、 Z 行列を保存する必要があるため、計算機メモリを減らすことはできない。そこで、FMMを導入して、行列・ベクトル積の計算をまとめて行うことにより、計算量及び計算機メモリ双方の削減を図る。

2.3 FMM

細線近似を適用した遠方セグメント間の相互インピーダンスは、

$$Z_{mkm'k'}^{far} = j\omega\mu_0 \int_{l_{mk}} \mathbf{f}_{mk}(\mathbf{r}_k) \cdot \int_{l_{m'k'}} \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k'}) \cdot \mathbf{f}_{m'k'}(\mathbf{r}_{k'}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (8)$$

で与えられる。 m と $m' (= 1, 2, \dots, M)$ はそれぞれ図1に示すように波源グループ及び観測点のグループの番号を表す。また、 k と $k' (= 1, 2, \dots, N/M)$ はそれぞれ m グループ、 m' グループ内の波源セグメント番号と観測セグメント番号である。そして、 l_{mk} と $l_{m'k'}$ はそれぞれ観測点と波源に沿う積分路を表す。

今、 $|\mathbf{r}_{mm'}| \gg |\mathbf{r}_{m'k'} - \mathbf{r}_{mk}|$ であれば、Gegenbauerの加法定

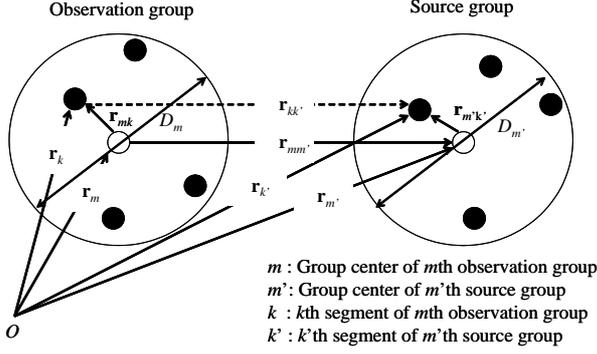


Figure 1 高速多重極法におけるベクトル関係式。

理 [30] 及び、球面波の平面波展開を用いることができ、(8) 式を

$$Z_{mkm'k'}^{far} \approx \frac{\omega\mu_0 k_0}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot T_L \mathbf{s}_{m'k'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \sin\theta d\theta d\phi \quad (9)$$

のように表すことができる。ただし、 $\mathbf{s}_{mn}(\hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{k}})$, T_L は、

$$\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{l_{mk}} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{mk}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{f}_{mk}(\mathbf{r}_{mk}) d\mathbf{r}_{mk} \quad (10)$$

$$\mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{l_{m'k'}} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{m'k'}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{f}_{m'k'}(\mathbf{r}_{m'k'}) d\mathbf{r}_{m'k'} \quad (11)$$

$$T_L = \sum_{l=0}^L (-j)^l (2l+1) h_l^{(2)}(k_0 r_{mm'}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'}) \quad (12)$$

のように表すことができる。(12) 式では、級数を有限の値 L で打ち切っている。また、経験的な式ではあるが、 L の基準として

$$L = k_0 D_{\max} + \alpha_L \ln(k_0 D_{\max} + \pi) \quad (13)$$

が与えられている。ここで、 D_{\max} はグループ直径のうちで最大の値である。また、 α_L は必要な精度に応じて与えるパラメータであり、およそ 1~10 の値を取る。

FMM を用い、(9) 式で表される遠方セグメント間の相互インピーダンスと電流ベクトルの積をまとめて計算する処理は以下の 3 ステップに分けられる。

Step. 1 Aggregation step (波源セグメント k' から波源グループ中心 m' への相互作用を計算し、乗じたいベクトル \mathbf{a} との積を保存しておく。)

$$\mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{k'=1}^K \mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_{k'} \quad (14)$$

Step. 2 Translation step (Step. 1 で求めた $\mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}})$ を、ある m 番目の観測グループの中心に集める。ただし、グループ m から見てグループ m' は十分離れているものとする。)

$$\mathbf{S}_m(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{m' \in M_{far}} \mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}}) T_L(k_0 r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'}) \quad (15)$$

Step. 3 Disaggregation step (Step. 2 で求めた $\mathbf{S}_m(\hat{\mathbf{k}})$ を用いて、 m 番目の観測グループにある各セグメントとの相互作用を計算し、インピーダンス行列 Z の i 行目と \mathbf{a} との積の計算を終える。)

$$\sum Z_{ij}^{far} \mathbf{a}_j \approx \frac{\omega\mu_0 k_0}{(4\pi)^2} \sum_{\theta=1}^L \sum_{\varphi=1}^{2L} W(\theta) \frac{\pi}{L} [\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{S}_m(\hat{\mathbf{k}})] \quad (16)$$

ここで、 M_{far} は第 m 番目の観測グループから見て遠方にある波源グループ、 $W(\theta)$ は θ に関する積分に用いるガウス-ルジャンドル積分の重みを指す。これらの処理に必要な計算時間を、近傍グループにあるセグメント間の相互インピーダンスとベクトルの積の計算時間と共に、以下の表 1 に示す。また、必要なメモリを以下の表 2 に示す。

面状アンテナのような 2 次元構造では、 L がグループの直径にほぼ比例することから、各グループ内のセグメント数 K との間に $L^2 \propto N/M (= K)$ が成立するので、 $M = K = \sqrt{N}$ となるようにグループ分けすれば、CG-FMM における 1 ステップの計算量及びメモリは共に $O(N^{1.5})$ になる。ただし、 $L^2 \propto K$ が成り立たない場合はその限りではない。

Table 1 高速多重極法を用いた行列-ベクトル積に要する計算時間。

	Step	CPU time
Near interaction		$O(M \times K^2)$
Far interaction	Step. 1	$O(N \times 2L^2)$
	Step. 2	$O(M^2 \times 2L^2)$
	Step. 3	$O(N \times 2L^2)$

Table 2 多重極展開係数及び近接相互作用の計算に要するメモリ。

Stored contents	Required memory
V, I, P, R	$O(N)$
Weight and integration point for Gauss-Legendre integration	$O(L)$
$Z_{mkm'k'}^{near}$	$O(M \times K^2)$
$\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}})$ and $\mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{k}})$	$O(N \times 2L^2)$
$T_L(k_0 r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'})$	$O(M^2 \times 2L^2)$

3. CG-FMM 法の計算時間及びメモリの検討

3.1 解析モデル

図 2~4 に示す 4 つのモデルに CG-FMM を適用し、計算時間と必要なメモリを調べた。各モデル毎に必要な CG-FMM の反復回数は、表 3 に示す回数で十分であることが分かっているので、反復回数は表 3 に従った。

Table 3 各モデル毎に必要な CG-FMM の反復回数。

Model	Iterative steps
1D dipole array antenna	Constant(= 20)
Long dipole antenna	N
2D planar antenna array	Constant(= 500)
2D planar antenna	Constant(= 500)

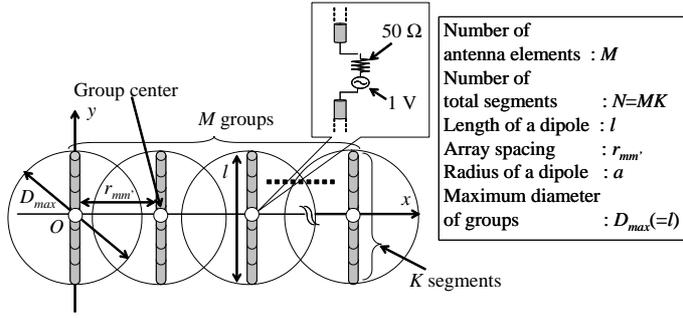


Figure 2 1次元H面ダイポールアレーアンテナ.

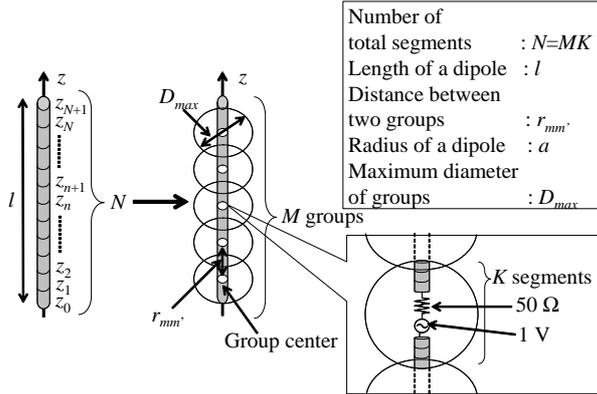


Figure 3 ロングダイポールアンテナ.

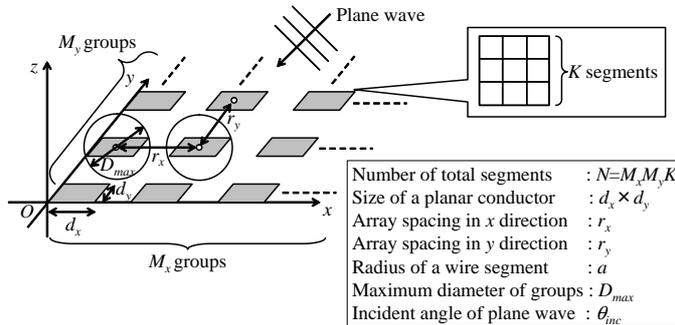


Figure 4 ワイヤメッシュ近似を用いた2次元板状アンテナアレー.

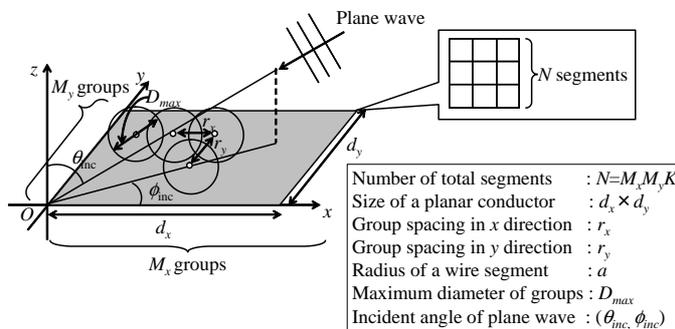


Figure 5 ワイヤメッシュ近似を用いた2次元板状アンテナ.

3.2 計算時間及び必要なメモリの比較検討

以上の4つのモデルをCG-FMMによって解析し、計算時間及び必要なメモリをGauss-Jordan法及びCG法と比較した。FMMの計算量及びメモリサイズと、精度を左右するパラメータ L は、(13)式で $\alpha_L = 2$ として決定した。この L の値は、十

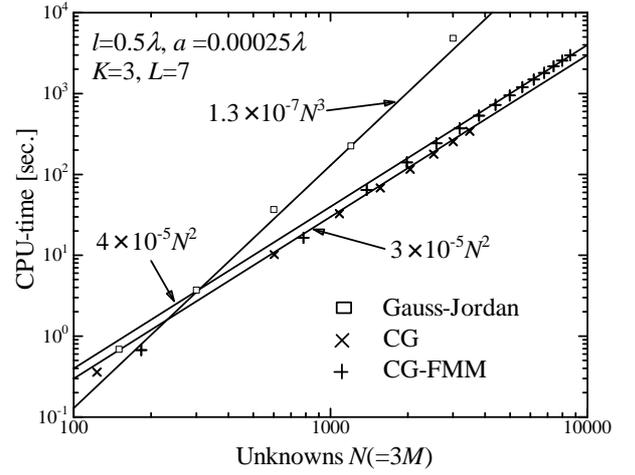


Figure 6 解析に必要な計算時間 (1次元H面アレーアンテナ).

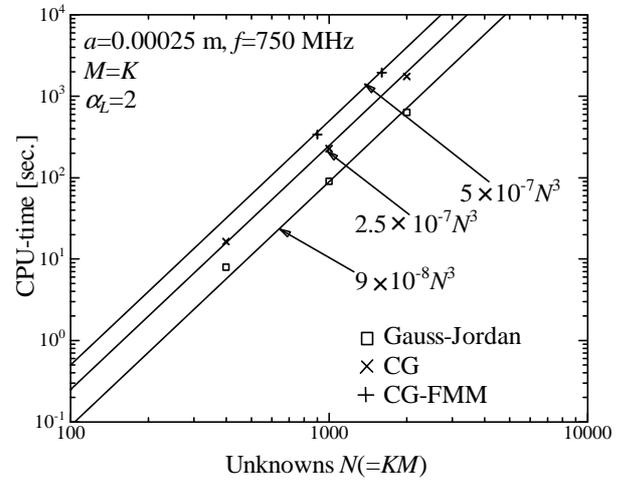


Figure 7 解析に必要な計算時間 (ロングダイポールアンテナ).

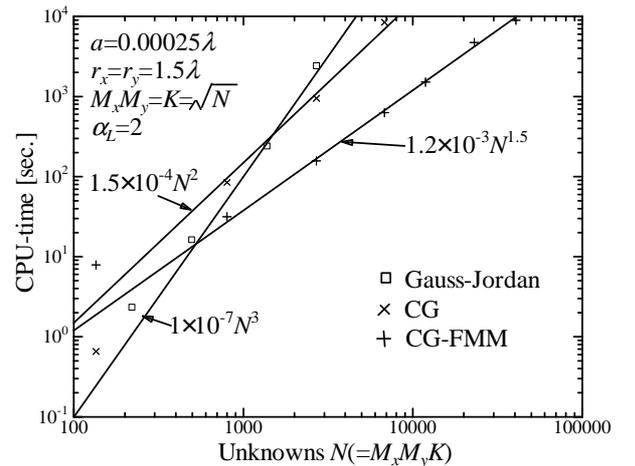


Figure 8 解析に必要な計算時間 (2次元板状アンテナアレー).

分な精度の解を与えることが分かっている。

図6～図9に各モデルを解析するのに必要な計算時間を示す。1次元H面ダイポールアレーアンテナでは、CG-FMMの計算時間は $O(N^2)$ となり、反復処理1回当たりの計算時間を削減することはできなかった。また、ロングダイポールアンテナの

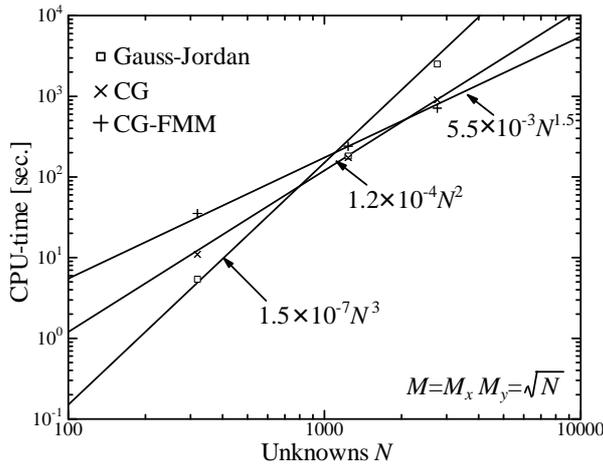


Figure 9 解析に必要な計算時間 (2次元板状アンテナ).

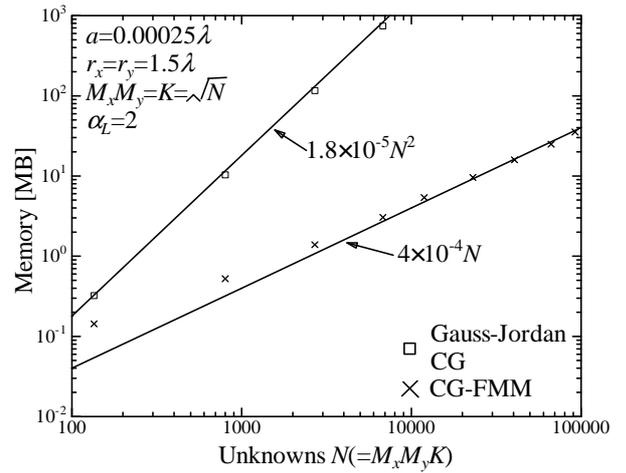


Figure 12 解析に必要なメモリ (2次元板状アンテナアレー).

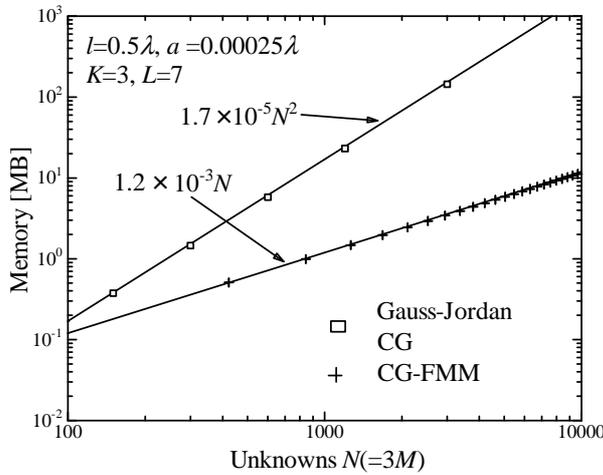


Figure 10 解析に必要なメモリ (1次元H面アレーアンテナ).

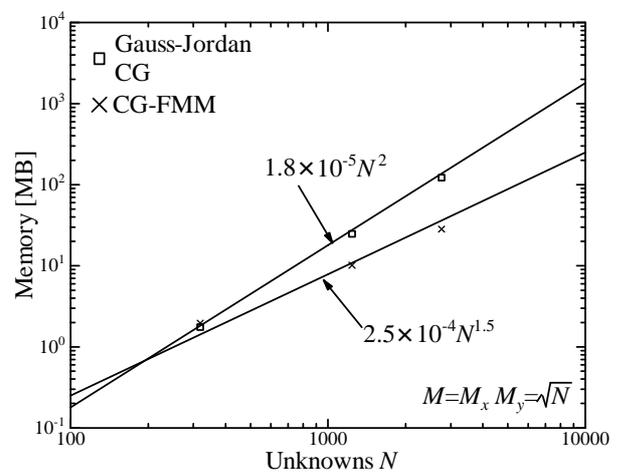


Figure 13 解析に必要なメモリ (2次元板状アンテナ).

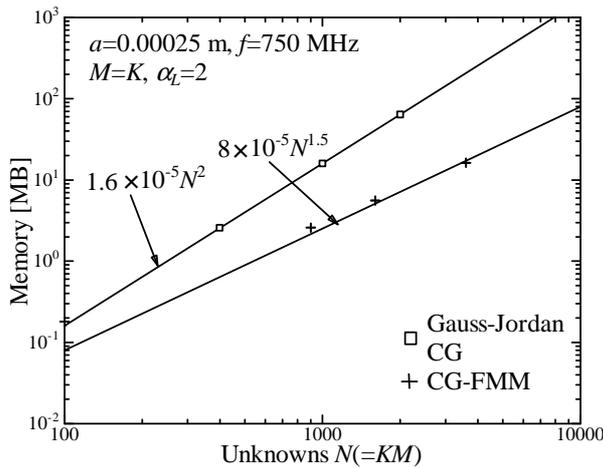


Figure 11 解析に必要なメモリ (ロングダイポールアンテナ).

解析に要したCG-FMMの計算時間は、 $O(N^2)$ の計算を N 回反復したため $O(N^3)$ となり、こちらも反復処理1回当たりの計算時間を削減することはできなかった。その原因としては、これらのモデルでは1次元的にセグメントが配置されており、 $K \propto D_{max}$ の関係が成り立つので、(13)式から $L \propto K$ の関係が成立してしまっていることが考えられる。 $L \propto K$ は、板状ア

ンテナのようにセグメントが2次元的に配置されているモデルの場合の $L^2 \propto K$ と異なる悪条件であり、そのために計算量が削減できなかったものと考えられる。一方、2次元板状アンテナアレー及び2次元板状アンテナでは、CG-FMMの計算時間は $O(N^{1.5})$ となり $O(N^2)$ に比べて削減されていることが分かる。これは、板状アンテナは2次元的にセグメントが配置されているモデルであり、 $L^2 \propto K$ が成り立っているためであると考えられる。

図10～図13に各モデルを解析するのに必要なメモリを示す。いずれの場合も、 Z 行列を保存しなければならないCG法やGauss-Jordan法の $O(N^2)$ と比較して、CG-FMMに要したメモリは $O(N) \sim O(N^{1.5})$ となり、十分削減されたことが分かる。一般的に、FMMを用いてもメモリは $O(N^{1.5})$ までしか削減できないにもかかわらず、1次元H面アレーアンテナと2次元板状アンテナアレーの場合に $O(N)$ までメモリを削減できたのは、モデルに存在する周期性を利用した結果である。一方で、ロングダイポールアンテナの場合は周期性を利用しているが、使用メモリは $O(N^{1.5})$ のみであった。しかしながら、 $M \gg K$ となるようにグループ分けすれば、このモデルでも使用メモリを $O(N)$ まで削減できる。

4. む す び

本報告では、CG-FMM を用いて 4 種類の大規模アンテナを数値解析し、計算量及びメモリと解析モデル及びパラメータの関係について検討した。その結果、1 次元的にセグメントが配置されているモデルの計算時間は削減できないことが分かった。しかしながら、周期性を利用すれば計算機メモリは $O(N)$ まで削減できることも分かった。今後は、周期性のない大規模モデルやワイヤメッシュを用いない面状構造の解析、また誘電体を含むモデルの解析に CG-FMM を適用していく予定である。

References

- [1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.
- [2] J. H. Richmond and N. H. Greay, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 23, No.5, pp. 412-414, May. 1975.
- [3] T.K. Sarker and S.M. Rao, "The application of the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic scattering from arbitrarily oriented wire antennas," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.32, no.4, pp.398-403, April 1984.
- [4] T.K. Sarker, "The conjugate gradient method as applied to electromagnetic field problems," IEEE Antennas Propagation Society Newsletter, vol.28, no.4, pp.4-14, Aug. 1986.
- [5] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Antennas and Propagat. Mag. vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.
- [6] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimension," J. Comput. Phys., vol.86, no.2, pp.414-439, Feb. 1990.
- [7] Huiqing Zhai, Qiaowei Yuan, Qiang Chen, and Kunio Sawaya, "A Numerical Study on Large-scale Periodic Array Antenna by FMM and FFT," Antennas and Propagation Society International Symposium 2006, IEEE 9-14 July 2006 Page(s):4035 - 4038
- [8] J.M. Song and W.C. Chew, "Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," Microw. Opt. Technol. Lett., vol.10, no.1, pp.14-19, Sept. 1995.
- [9] J.M. Song, C.C. Lu, and W.C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.45, no.10, pp. 1488-1493, Oct. 1997.
- [10] X.Q. Sheng, J.M. Jin, J.M. Song, W.C. Chew, and C.C. Lu, "Solution of combined-field integral equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.46, no.11, pp.1718-1726, Nov. 1998.
- [11] K.C. Donepudi, J.M. Song, J.M. Jin, G. Kang, and W.C. Chew, "A novel implementation of multilevel fast multipole algorithm for higher order galerkin's method," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.48, no.8, pp.1192-1197, Aug. 2000.
- [12] S. Ohnuki, and W.C. Chew, "Numerical accuracy of multipole expansion for 2-D MLFMA," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.51, no.8, pp.1883-1890, Aug. 2003.
- [13] S. Velampambal, and W.C. Chew, "Analysis and performance of a distributed memory multilevel fast multipole algorithm," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.53, no.8, pp.2719-2727, Aug. 2005.
- [14] O. Ergul, and L. Gurel, "Efficient Parallelization of the Multilevel Fast Multipole Algorithm for the Solution of Large-Scale Scattering Problems," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.56, no.8, pp.2335-2345, Aug. 2008.
- [15] J. Fostier, and F. Olyslager, "An Asynchronous Parallel MLFMA for Scattering at Multiple Dielectric Objects," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.56, no.8, pp.2346-2355, Aug 2008.
- [16] J. Fostier, and F. Olyslager, "A grid computer implementation of the multilevel fast multipole algorithm for full-wave analysis of optical devices," IEICE Trans. Commun., vol.E90-B, no.9, pp.2430-2438, Sept. 2007.
- [17] I. Bogaert, J. Peeters, and F. Olyslager, "A nondirective Plane Wave MLFMA Stable at Low Frequencies," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.56, no.12, pp.3752-3767, Dec. 2008.
- [18] D. Wulf and R. Bunger, "An Efficient Implimentation of the Combined Wideband MLFMA/LF-FIPWA," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.57, no.2, pp.467-474, Feb. 2009.
- [19] Huiqing Zhai, Qiang Chen, Qiaowei Yuan, Kunio Sawaya, Changhong Liang, "Analysis of large-scale periodic array antennas by CG-FFT combined with equivalent sub-array preconditioner," IEICE Trans. Commun., vol.E89-B, no.3, pp.922-928, March 2006.
- [20] E. Bleszynski, M. Bleszynski, and T. Jaroszewicz, "AIM: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems," Radio Science, vol.31, pp.1225-1251, Sept.-Oct. 1996.
- [21] F. Ling, C. Wang, and J.M. Jin, "An efficient algorithm for analyzing large-scale microstrip structures using adaptive integral method combined with discrete complex-image method," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.48, no.5, pp.832-838, May 2000.
- [22] W.B. Ewe, L.W. Li, and M.S. Leong, "Fast solution of mixed dielectric/conducting scattering problem using volume-surface adaptive integral method," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.52, no.11, pp.3071-3077, Nov. 2004.
- [23] O.S. Kim, and P. Meincke, "Adaptive integral method for higher order method of moments," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.56, no.8, pp.2298-2305, Aug. 2008.
- [24] R. Mittra ed., Computer Teqniques for Electromagnetics, Pergamon, New York, 1973.
- [25] J.E. Storer, "Variational Solution to the Problem of the Symmetrical Cylindrical Antenna," Cruft Lab., Harvard Univ., Cambridge, MA., Tech. Rep. 101, 1950.
- [26] C.-T. Tai, "A Variational Solution to the Problem of Cylindrical Antennas," Stanford Res. Inst., Stanford, CA, Tech. Rep. 12, 1950.
- [27] N. Inagaki, "An Improved Circuit Theory of a Multielement Antenna," IEEE, Trans. Antennas Propag., vol.AP-17, no.2, pp.120-124, March 1969.
- [28] Kunio Sawaya, "Antenna Design by Using Method of Moments," IEICE Trans. Commun., vol.E88-B, no.5, pp.1766-1773, May, 2005.
- [29] M.R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of Conjugate gradients for Solving Linear systems," J.Res. Nat. Bur. Standards. vol.49, no.6, pp.409-436, Dec. 1952.
- [30] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1972.
- [31] J. Tang, Numerical Aspects of Iterative Solving of Linear Systems derived from Helmholtz's Problem, Literature Report of Delft University of Technology, Feb. 2004.