

高速多重極法を用いた1次元線状アンテナの数値解析

今野 佳祐[†] 陳 強[†] 澤谷 邦男[†]

[†] 東北大学大学院 工学研究科 電気通信工学専攻 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
E-mail: †{konno, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし モーメント法はアンテナの数値解析手法の1つとして知られており、近年その高速化及びメモリ低減化の研究が行われている。モーメント法の計算時間とメモリを削減するための手法の1つとして、反復法(共役勾配法)に高速多重極法(Fast Multipole Method)を適用する手法が有力である。しかしながら、高速多重極法の収束性や計算時間及び必要なメモリは種々のパラメータや解析モデルに依存し、その検討は十分とは言えない。そこで本研究では、線状アンテナに高速多重極法を適用し、その収束性や計算時間及び必要なメモリについて検討したので報告する。

キーワード モーメント法, 高速多重極法, 共役勾配法.

Analysis of One-dimensional Linear Antenna Using FMM

Keisuke KONNO[†], Qiang CHEN[†], and Kunio SAWAYA[†]

[†] Electrical and Communication Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University
Aramaki Aza Aoba 6-6-05, Aoba-ku, Sendai, 980-8579, Japan
E-mail: †{konno, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract Method of Moments (MoM) is known as one of the efficient numerical analysis methods for antennas and researches to reduce its CPU time and memory have been performed in recent years. As a method to reduce the CPU time and memory for MoM, an iterative solver (Conjugate Gradient Method) combined with fast multipole method (FMM) is very powerful. However, CPU time, convergence and required memory of FMM, which depend on various parameters and characteristic of analysis model, are not sufficiently considered. In this research, FMM is applied to a linear antenna and its convergence, CPU time and required memory are considered.

Key words Method of moments (MoM), Fast multipole method (FMM), Conjugate gradient Method (CG).

1. 背景

モーメント法 [1] (Method of Moments, MoM) は微分方程式や積分方程式を連立方程式に変形し、数値的にこれを解く方法であるが、主に導体表面における電界積分方程式を連立方程式に変形し、これを数値的に解いて導体表面の電流分布を求めることに用いられる。

一般に、 $N \times N$ の線形連立方程式を解く手法は、直接法 (Gauss 消去法など) と、反復法 (CG 法や Gauss-Seidel 法など [3]~[7]) に分けられる。直接法の計算量は N^3 に比例するが、反復法の1ステップあたりの計算量は N^2 と比例する。反復法の1ステップあたりの計算量を低減するため、1990年に V.Rokhlin によって高速多重極法 [8] [9] (FMM, Fast Multipole Method) が提案された。FMMを用いると、反復法で必要な行列-ベクトル積の計算量を最適な場合で $O(N^2)$ から $O(N^{1.5})$ に減らすことができ、メモリも同様である。そのため、高速多重極法の研究はこれまで盛んに行われてきた [10]~[12]。しかしながら、モデルやグ

ループ分けなどの違いによる収束性及び計算時間の検討は必ずしも十分とは言えない。本研究では、1次元線状アンテナのモデルを高速多重極法で解析し、その収束性や計算時間及びメモリについて検討したので報告する。

2. 電磁界数値解析の原理

2.1 Richmond のモーメント法

完全導体の線状アンテナや散乱体に外部から電界 \mathbf{E}^{inc} が入射した場合を考える。完全導体表面での電界の接線成分は、以下の境界条件を満たす。

$$\left[\mathbf{E}^l(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \right]_t = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } l \quad (1)$$

従って、線状導体表面 l の線電流密度 \mathbf{J}_l に対する電界積分方程式は、

$$\mathbf{E}_t^{inc}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \int_l \left[\bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_l(\mathbf{r}') \right]_t d\mathbf{r}' \quad (2)$$

となる。ここで、 \mathbf{E}^{inc} は既知の入射電界、 \mathbf{E}^l は導体表面を流れ

る未知の線電流密度 \mathbf{J}_l によって生じる散乱電界である。また、添字の "l" は導体表面の接線成分を表し、 \overline{G}_0 は自由空間のダイアディックグリーン関数

$$\overline{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\overline{I} + \frac{\nabla \nabla}{k_0^2} \right) \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3)$$

を表す。ここで、 \overline{I} は単位ダイアド、 k_0 は自由空間の平面波の波数である。(2) 式を数値的に解く方法の1つがモーメント法 [1] である。モーメント法では導体表面をセグメントに分割し、各セグメント上の線電流密度 \mathbf{J}_l を基底関数 (展開関数) $\mathbf{f}_{n'}(\mathbf{r}')$ を用いて展開し、重み関数 $\mathbf{w}_n(\mathbf{r})$ との内積を取ることで (2) 式を以下のように変形する。

$$[Z_{nn'}][I_n] = [V_n] \quad (4)$$

ここで、 V_n は電圧係数で、入射電界 \mathbf{E}^{inc} によって以下のように表現される。

$$V_n = \int_l \mathbf{w}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5)$$

また、 $Z_{nn'}$ は自己 (相互) インピーダンスを意味し、以下の式で表現される。

$$Z_{nn'} = j\omega\mu_0 \int_l \int_{l'} \mathbf{w}_n(\mathbf{r}) \cdot \overline{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_{n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (6)$$

ここで、(4) 式の $[Z_{nn'}]$ の逆行列を求めれば、未知の電流ベクトル $[I_n]$ を求めることができ、それをを用いて入力インピーダンスや遠方界などを求めることもできる。本研究では、精度の高い結果を得るために重み関数 $\mathbf{w}_n(\mathbf{r})$ と基底関数 $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ を一致させるガラーキン法の1種であり、どちらにも区分正弦関数を選択する Richmond のモーメント法 [2] を用いている。本研究では、これ以降 Richmond のモーメント法を前提として議論する。

2.2 共役勾配法

(4) 式を高速に解く方法として、反復法がしばしば用いられる。本研究では、その1つである共役勾配法 [5]~[7] を用いている。共役勾配 (Conjugate Gradient) 法では、以下の手順に従って $N \times N$ 連立方程式 $ZI = V$ を解く。

- 初期値を I_0 とする。

$$\mathbf{R}_0 = ZI_0 - V$$

$$\mathbf{P}_1 = -Z^\dagger \mathbf{R}_0$$

- 反復 ($i = 1, 2, \dots$)

$$\alpha_i = -\frac{\langle Z\mathbf{P}_i, \mathbf{R}_{i-1} \rangle}{\langle Z\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_i \rangle} = \frac{\|Z^\dagger \mathbf{R}_{i-1}\|^2}{\|Z\mathbf{P}_i\|^2}$$

$$I_i = I_{i-1} + \alpha_i \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{R}_i = ZI_i - V = \mathbf{R}_{i-1} + \alpha_i Z\mathbf{P}_i$$

$$\beta_i = \frac{\|Z^\dagger \mathbf{R}_i\|^2}{\|Z^\dagger \mathbf{R}_{i-1}\|^2}$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = -Z^\dagger \mathbf{R}_i + \beta_i \mathbf{P}_i$$

ただし、 \mathbf{R}_i は残差ベクトル、 \mathbf{P}_i は解の修正ベクトル、 α と β はそれぞれ解 I と \mathbf{P}_i の修正係数である。解の修正ベクトル \mathbf{P}_{i+1} がそれまでの $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_i$ と直交するように生成されるので、

数値誤差がなければ高々 N 回の反復で残差 \mathbf{P}_i が 0 になり、解が得られる。以上のプロセスの中で、最も計算量が多い部分は Z 行列とベクトルの積を計算する部分である。特に未知数 N が多くなると、1 ステップあたりの計算時間とメモリは N^2 に比例して増大していく。そこで、以下に示す高速多重極法 (FMM) を適用して計算時間と必要なメモリを減らす。

2.3 高速多重極法

共役勾配法に FMM [8]~[12] を適用して行列-ベクトル積を高速化するために、以下の図 1 に示すように、 N 個のセグメント (未知数) を M 個のグループに分け、各グループには K 個のセグメントが含まれているとする。第 m グループ内の第 k セグメント (観測点) と第 m' グループ内の第 k' セグメント (波源) 間の相互インピーダンスは、セグメントが線状であると仮定すると、(6) 式を用いて以下のように与えられる。

$$Z_{mkm'k'} = j\omega\mu_0 \int_{l_{mk}} \mathbf{f}_{mk}(\mathbf{r}) \cdot \int_{l_{m'k'}} \overline{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_{m'k'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (7)$$

ここで、 l_{mk} と $l_{m'k'}$ はそれぞれ観測点と波源のセグメントに沿った積分を表す。

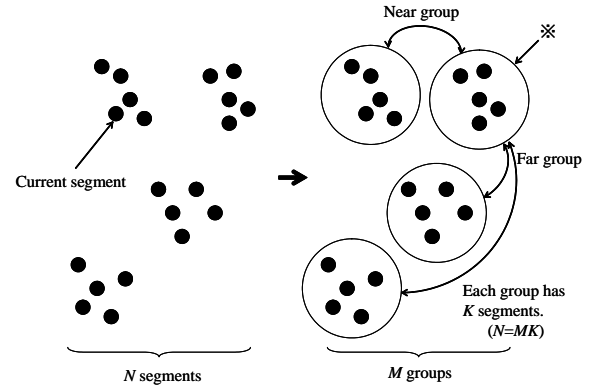


Figure 1 高速多重極法におけるグループ化 ($N = 20, K = 5, M = 4$ の場合)。

インピーダンスをグループ内及び隣接するグループに含まれるセグメント間のインピーダンス Z^{near} と離れたグループに含まれるセグメント間のインピーダンス Z^{far} に分けて考えると、共役勾配法の計算における Z 行列の i 行目と任意のベクトル \mathbf{a} との積は以下の2項の和に分けることができる。

$$\sum_{j=1}^N Z_{ij} a_j = \sum Z_{ij}^{near} a_j + \sum Z_{ij}^{far} a_j \quad (8)$$

となる。FMM をこのうちの Z^{far} 項に適用して高速化とメモリ低減を図る。 Z^{near} 項は従来の方法で計算する。

FMM では、(6) 式に含まれるスカラーグリーン関数を Gegenbauer の加法定理 [13] を用いて球面関数に展開し、加えて球面関数を平面波展開することで遠方セグメント間の相互インピーダンスを計算する。そうすると、以下の図 2 で表現されるような、互いに十分遠方にある第 m 観測グループにある第 k セグメントと第 m' 波源グループにある第 k' セグメント間の相互インピーダンスは以下のような式で表現できる。

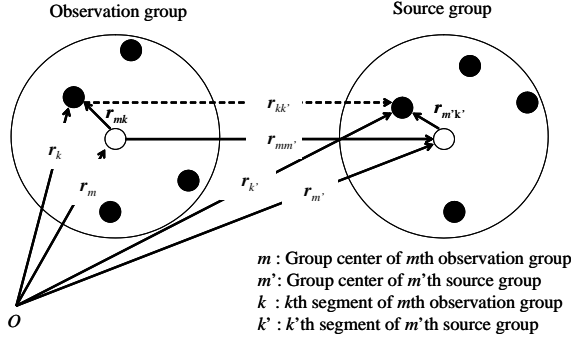


Figure 2 高速多重極法におけるベクトル関係式

$$Z_{mkm'k'}^{far} a_j \approx \frac{\omega\mu_0 k_0}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot T_L \mathbf{s}_{m'k'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \sin\theta d\theta d\phi \quad (9)$$

ただし, T_L , $\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{s}_{m'k'}^*(\hat{\mathbf{k}})$ は以下の式で表される.

$$\begin{aligned} T_L &= T_L(k_0 r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'}) \\ &= \sum_{l=0}^L (-j)^l (2l+1) h_l^{(2)}(k_0 r_{mm'}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'}) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{l_{mk}} \mathbf{e}^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{mk}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{f}_{mk}(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}_k \quad (11)$$

$$\mathbf{s}_{m'k'}^*(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{l_{m'k'}} \mathbf{e}^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{m'k'}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{f}_{m'k'}^*(\mathbf{r}_{k'}) d\mathbf{r}_{k'} \quad (12)$$

ここで, $h_l^{(2)}$ は第 2 種ハンケル関数, P_l はルジャンドル関数である. また, $\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, $\mathbf{k} = k_0 \hat{\mathbf{k}}$ である. (9) 式は近似式となっているが, それはスカラーグリーン関数を球面関数で展開する際, 計算機上では有限の項数でしか展開できないためである. 展開項数の上限 ((10) 式の L) は経験的に以下の式で決定される.

$$L = k_0 D_{\max} + \alpha_L \ln(k_0 D_{\max} + \pi) \quad (13)$$

ここで, D_{\max} はグループ直径の最大値, α_L は精度を調整するために任意に増減させてよいパラメータである.

(9) 式を利用して, (8) 式の右辺第 2 項をまとめて計算する手順を以下に示す.

Step. 1 Aggregation step (波源セグメント k' から波源グループ中心 m' への相互作用を計算し, 乗じたいベクトル \mathbf{a} との積を保存しておく.)

$$\mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{k'=1}^K \mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{k}}) a_{k'} \quad (14)$$

Step. 2 Translation step (Step. 1 で求めた $\mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}})$ を, ある m 番目の観測グループの中心に集める. ただし, グループ m から見てグループ m' は十分離れているとする.)

$$\mathbf{S}_m(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{m' \in M_{far}} \mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}}) T_L(k_0 r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'}) \quad (15)$$

Step. 3 Disaggregation step (Step. 2 で求めた $\mathbf{S}_m(\hat{\mathbf{k}})$ を用

いて, m 番目の観測グループにある各セグメントとの相互作用を計算し, インピーダンス行列 Z の i 行目と \mathbf{a} との積の計算を終える.)

$$\sum Z_{ij}^{far} a_j \approx \frac{\omega\mu_0 k_0}{(4\pi)^2} \sum_{\theta=1}^L \sum_{\phi=1}^{2L} W(\theta) \frac{\pi}{L} [\mathbf{S}_{mk}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{S}_{m'}^*(\hat{\mathbf{k}})] \quad (16)$$

ただし, $W(\theta)$ は θ 方向の積分に用いるガウス-ルジャンドル積分の重みを指す. これらの処理による高速化とメモリ低減化の効率は次章で説明する.

3. 高速多重極法の計算量とメモリ

高速多重極法における行列-ベクトル積に必要な計算時間は, 各ステップごとに以下の表 1 のようになる.

Table 1 高速多重極法を用いた行列-ベクトル積に要する計算時間

| | Step | CPU time |
|------------------|---------|----------------------|
| Near interaction | | $O(M \times K^2)$ |
| Far interaction | Step. 1 | $O(N \times 2L^2)$ |
| | Step. 2 | $O(M^2 \times 2L^2)$ |
| | Step. 3 | $O(N \times 2L^2)$ |

また, 高速多重極法の計算に必要な多重極展開係数及び近接相互作用を保存するメモリを以下の表 2 に示す.

Table 2 多重極展開係数及び近接相互作用の計算に要するメモリ

| Procedure | Stored contents | Required memory |
|-----------|---|----------------------|
| Proc. 1 | $Z_{mkm'k'}^{near}$ | $O(M \times K^2)$ |
| Proc. 2 | $\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{k}})$ and $\mathbf{s}_{m'k'}^*(\hat{\mathbf{k}})$ | $O(N \times 2L^2)$ |
| Proc. 3 | $T_L(k_0 r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{mm'})$ | $O(M^2 \times 2L^2)$ |

$MK = N$ と一般的に $L^2 \propto N/M$ となることを用い, N, M を用いて, Near interaction と Step. 1~Step. 3 で必要な計算量及びメモリの合計を求めるとどちらも $O(N^2/M + MN)$ となる. これを M の関数として考えると, $M = \sqrt{N}$ のときに計算量が最小の $O(N^{1.5})$ となることが分かる. ただし, $L^2 \propto N/M$ が成立しない場合や解析モデルに周期性がある場合などはこの限りではない. また, 表 1 で示した計算時間は CG 法の反復回数 1 回あたりの計算量である. 従って, CG 法の反復回数が N 回の場合は, 計算量は最小で $O(N^{2.5})$ になる.

4. 高速多重極法を用いた 1 次元大規模モデルの解析

4.1 H 面ダイポールアレーアンテナ

まず, 図 3 に示すような 1 次元アレーアンテナの解析を行った. 図 3 に示すように, 1 本のダイポールアンテナを 1 つのグループとして取り扱った. このモデルの作る Z 行列は良条件な行列であり, CG 法で精度の良い解を得るための反復回数は 10~20 回程度で十分であることが分かっている. また, (13) 式の α_L は 2 とすれば十分精度のよい解が得られる. そこで, このモデルの解析では CG 法の反復回数を 20 回, $\alpha_L = 2$ で固定とした.

以下の図 4~6 に解析結果を示す. 図 4 から, CG 法中の反

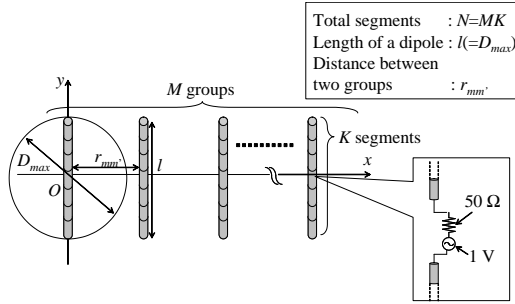


Figure 3 H面ダイポールアレーアンテナ

復計算に FMM を適用した CG-FMM 法の計算結果は CG 法の計算結果とほぼ一致していることが分かる. また, 図 5 には Gauss-Jordan 法, CG 法, CG-FMM 法の各手法を用いて問題を解析するのに要した総計算時間を示してある. 今のモデルでは, CG 法の計算が収束するのに必要な反復回数が未知数 N に比例せず一定なので, 高速化が実現されていれば CG-FMM 法の計算時間のオーダーが $O(N^2)$ より小さくなるはずである. しかし図 5 を見ると, CG-FMM 法の計算時間が削減されていないことが分かる. この原因については次章で考察する. そして, 図 6 には計算に必要なメモリを示した. こちらの図によれば, CG-FMM 法によって計算に必要なメモリが低減されていることが分かる. 理想的なグループ分けがなされていないにもかかわらず, CG-FMM 法に必要なメモリのオーダーは $O(N)$ となっており, 一般的な最小値 $O(N^{1.5})$ よりも小さなオーダーとなっているが, これはモデルの周期性を利用しているためである.

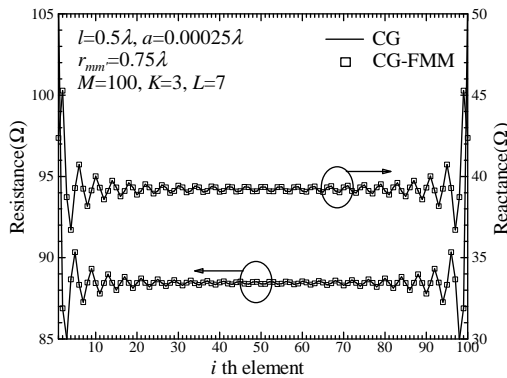


Figure 4 動作インピーダンスの確認 (H面ダイポールアレーアンテナ)

4.2 ロングダイポールアンテナ

次に, 図 7 に示す 1 本の長いダイポールアンテナを解析した. このモデルで作る Z 行列は悪条件な行列となり, 精度のよい解を得るための CG 法の反復回数が未知数 N に比例してしまうことが分かっている. 従って CG 法の反復回数は N 回とし, FMM の計算精度を調整するパラメータ $\alpha_L = 2$ とした.

以下の図 8~10 に解析結果を示す. 図 8 に示された動作インピーダンスの周波数特性から, CG-FMM 法の解析結果は Gauss-Jordan 法で解析した結果とほぼ一致していることが分かる. また, 図 9 には Gauss-Jordan 法, CG 法, CG-FMM 法の各手法でこの問題を解析した計算時間を示してある. この際,

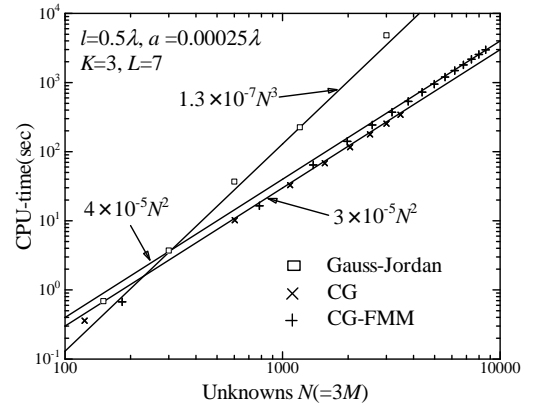


Figure 5 計算時間削減の確認 (H面ダイポールアレーアンテナ)

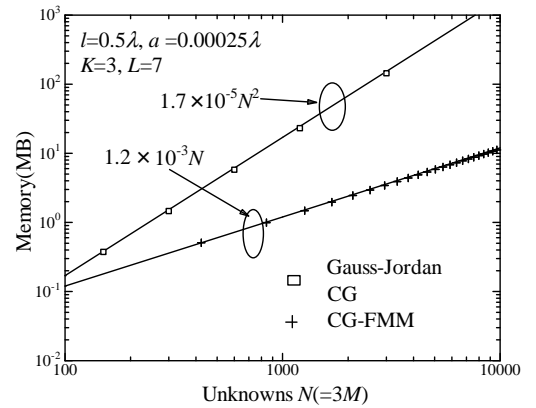


Figure 6 省メモリ化の確認 (H面ダイポールアレーアンテナ)

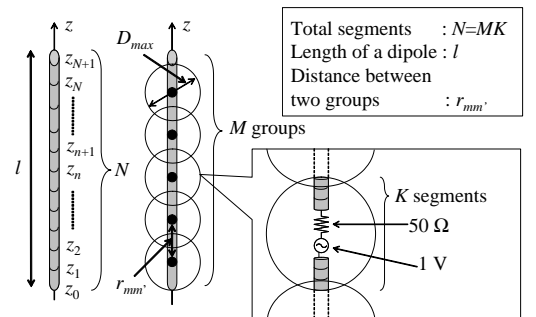


Figure 7 ロングダイポールアンテナ

グループ分けは理論上最適な $M = K = \sqrt{N}$ としたにもかかわらず, CG-FMM 法の計算時間のオーダーは $O(N^3)$ となっている. モデルでは, CG 法の反復回数が未知数 N に比例するので, 最適なグループ分けがなされた場合, CG-FMM 法のオーダーは一般的に $O(N^{2.5})$ となるはずである. この原因に関しては次章で考察する. 最後に, 解析に必要なメモリを図 10 に示す. CG-FMM 法に要するメモリは, 最小のオーダー $O(N^{1.5})$ となっており, グループ化を最適とした効果が現れている.

5. 1次元線状モデルのCG-FMM解析に要する計算量及びメモリの理論的検討

前章では, CG-FMM 法で 2 種類の 1 次元大規模線状アンテナを解析した. その結果, 特に計算量の削減効果がこれらのモ

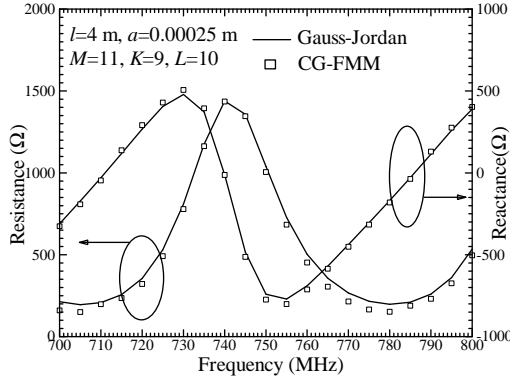


Figure 8 動作インピーダンスの解析 (ロングダイポールアンテナ)

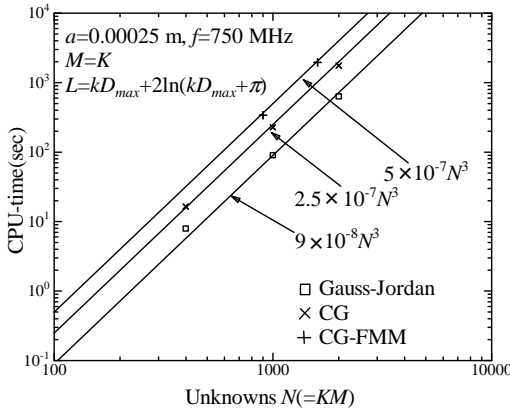


Figure 9 計算時間削減の確認 (ロングダイポールアンテナ)

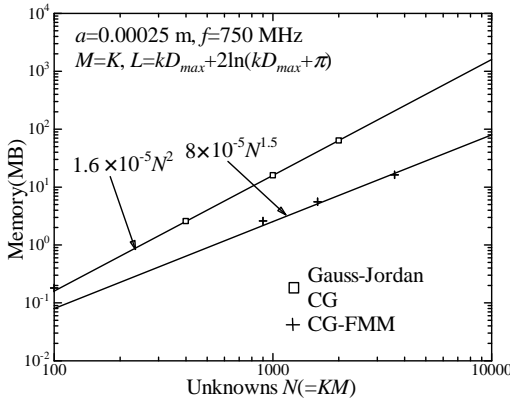


Figure 10 省メモリ化の確認 (ロングダイポールアンテナ)

デルでは見られなかったもので、その原因について本章で理論的に検討する。加えて、メモリの理論的検討も合わせて行う。

5.1 計算量の理論的検討

(17) 式は、CG-FMM 法 1 ステップあたりの計算量を示したものである。

$$CPU\ time \propto K^2 M + KM \cdot 2L^2 + M^2 \cdot 2L^2 + KM \cdot 2L^2 \quad (17)$$

第 1 項から順に、表 1 の Near interaction 及び Far interaction の step. 1~step. 3 の計算量をそれぞれ表している。さて、FMM を CG 法の反復計算に適用した際に、計算量を削減できるかどうかは (13) 式で表現される L と、グループに含まれるセグメント数 K の関係で決定される。(13) 式より、 $L \propto D_{max}$

であり、セグメント長の半分を Δl とすれば、線状アンテナでは、 $D_{max} = \Delta l \times (K + 1)$ が成立する。すなわち、線状アンテナのモデルでは $L \propto K$ が成立することになる。これは、一般的な大規模モデルで成立する比例関係 $L^2 \propto N/M (= K)$ とは異なっており、そのために計算量が削減できなかったと考えられる。(17) 式に $L = aK$ と置いて代入し、整理すると以下のように変形できる。

$$CPU\ time \propto 2a^2 N^2 + N(4a^2 K^2 + K) \quad (18)$$

(18) 式から分かるように、 $L \propto K$ のときはグループ分けやモデルによらず CG-FMM 法の 1 ステップあたりの計算量が N^2 に比例してしまうことになる。 $O(N^2)$ は CG 法の 1 ステップあたりの計算量と同じであり、従って、この場合は FMM を用いて CG 法の 1 ステップあたりの計算量を削減できないことになる。従って、CG-FMM 法全体のオーダーは問題を解くに必要な CG 法の反復回数が N に比例するかどうかで決定される。H 面ダイポールアレーモデルでは、CG 法に必要な反復回数が N に比例しないので、計算量は $O(N^2)$ となる。一方、ロングダイポールアンテナでは、CG 法に必要な反復回数が N に比例するので、計算量は $O(N^3)$ となる。これらの検討結果は、前章の図 5, 9 の解析結果と一致している。

5.2 メモリの理論的検討

(19) 式は、CG-FMM 法の計算に必要なメモリを示している。

$$memory \propto KM + L + K^2 + (K + M)L^2 \quad (19)$$

第 1 項から順に、CG 法におけるベクトル、ガウス積分の分点や重み、Near group の相互作用、 T_L 及び $\mathbf{s}(\mathbf{k})$ を保存するのに必要なメモリを表す。こちらも、計算量の理論的検討をしたときと同様に $L = aK$ と置いて整理すると、以下ようになる。

$$memory \propto \underbrace{(a^2 K^2 + K)M}_A + \underbrace{aK + K^2 + a^2 K^3}_B \quad (20)$$

(20) 式は、下線 A 部は M に比例する項で、下線 B 部は K^3 に比例する項である。従って、 $M \gg K$ だと下線 A 部の項が、 $M \ll K$ だと下線 B 部の項がそれぞれメモリのオーダーを左右する項となる。 $M = K = \sqrt{N}$ の場合と合わせて 3 つに場合分けすると、それぞれメモリのオーダーは以下の表 3 のように定まる。

Table 3 線状大規模モデルの CG-FMM 解析に要するメモリ

| Case | Order of memory |
|--|-----------------|
| $M \gg K$ (i.e. $K \approx \varepsilon, M \approx N$) | $O(N)$ |
| $M = K = \sqrt{N}$ | $O(N^{1.5})$ |
| $M \ll K$ (i.e. $K \approx N, M \approx \varepsilon$) | $O(N^3)$ |

次に、表 3 を実際にシミュレーションで確かめた。シミュレーションでは、前章で大規模線状モデルを解析するのに使用したプログラム中で定義した配列のメモリを全て加えたものを計算した。その結果と、表 3 で理論的に導いた各場合のオーダーを表す直線を比較したグラフを以下の図 11~13 に示す。図 11 では、1 グループあたりのセグメント数を $K = 10$ で固定し、グループ数 M を増加させたシミュレーション結果を示している。

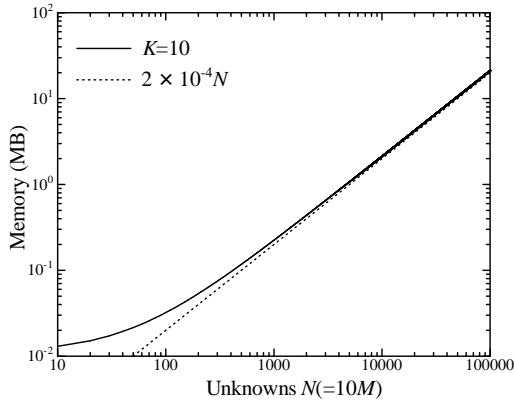


Figure 11 線状大規模モデルの CG-FMM 解析に要するメモリ ($M \gg K$)

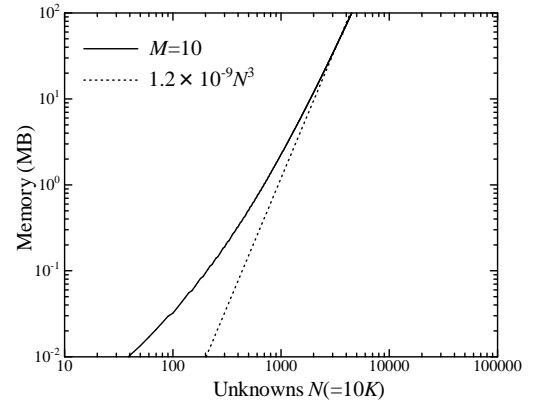


Figure 13 線状大規模モデルの CG-FMM 解析に要するメモリ ($M \ll K$)

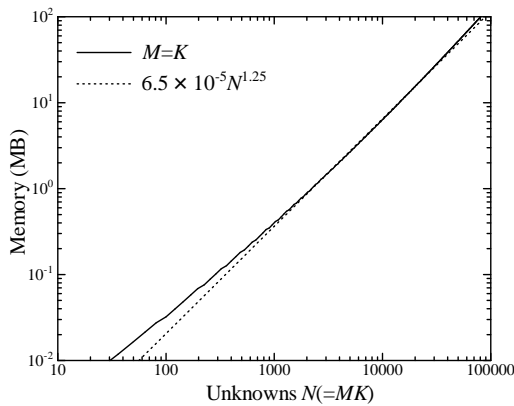


Figure 12 線状大規模モデルの CG-FMM 解析に要するメモリ ($M = K = \sqrt{N}$)

M が K より非常に大きい領域では、理論的検討と一致した結果が得られていることが分かる。図 12 では、シミュレーション結果は $O(N^{1.25})$ の直線とほぼ一致しており、理論的検討とややずれが見られる。おそらく、理論的検討では (20) 式中の a の寄与を考慮していないためではないかと考えられる。図 13 では、図 11 と逆にグループ数を $M = 10$ で固定し、グループ中のセグメント数 K を増加させたシミュレーション結果を示している。 K が M より非常に大きい領域では、理論的検討と一致した結果が得られていることが分かる。

以上の結果から、CG-FMM 法で 1 次元大規模線状アンテナを解析するときには、 $M \gg K$ となるようにグループ分けするとメモリを最も低減できることが明らかになった。

6. まとめ及び今後の課題

今回は、大規模な 1 次元線状アンテナの問題を CG-FMM 法で解析し、計算量の削減と省メモリ化が可能かどうかを確かめ、理論的な面からの検討結果と比較した。その結果、このモデルに関しては計算量が削減できないことが分かったが、メモリは $O(N)$ に低減できることが明らかになった。今後は、解析対象を 2 次元のモデルに拡張して同様の検討を行うことと、高速多重極法を別の基底関数 (RWG 関数など) に適用することなどが課題として挙げられる。

References

- [1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.
- [2] J. H. Richmond and N. H. Greay, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 23, No.5, pp. 412-414, May. 1975.
- [3] Qiang Chen, Qiaowei Yuan, Kunio Sawaya, "Fast algorithm for solving matrix equation in MoM analysis of large-scale array antennas," IEICE Trans. Commun., vol.E85-B, no.11, pp.2482-2488, Nov. 2002.
- [4] Qiang Chen, Qiaowei Yuan, Kunio Sawaya, "Convergence of SOR in MoM analysis of array antenna," IEICE Trans. Commun., vol.E88-B, no.5, pp.2220-2223, May 2005.
- [5] T.K. Sarker and S.M. Rao, "The application of the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic scattering from arbitrarily oriented wire antennas," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.32, no.4, pp.398-403, April 1984.
- [6] T.K. Sarker, "The conjugate gradient method as applied to electromagnetic field problems," IEEE Antennas Propagation Society Newsletter, vol.28, no.4, pp.4-14, Aug. 1986.
- [7] M.R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of Conjugate gradients for Solving Linear systems," J.Res. Nat. Bur. Standards. vol.49, no.6, pp.409-436, Dec. 1952.
- [8] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Antennas and Propagat. Mag. vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.
- [9] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimension," J. Comput. Phys., vol.86, no.2, pp.414-439, Feb. 1990.
- [10] J.M. Song and W.C. Chew, "Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," Microw. Opt. Technol. Lett., vol.10, no.1, pp.14-19, Sept. 1995.
- [11] J.M. Song C.C. Lu, and W.C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.45, no.10, pp. 1488-1493, Oct. 1997.
- [12] X.Q. Sheng, J.M. Jin, J.M. Song, W.C. Chew, and C.C. Lu, "Solution of combined-field integral equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.46, no.11, pp.1718-1726, Nov. 1998.
- [13] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1972.