

[チュートリアル講演] モーメント法によるアレーアンテナの数値解析

今野 佳祐[†] 陳 強[†]

[†] 東北大学大学院 工学研究科 通信工学専攻 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
E-mail: †{keisuke.konno.b5, qiang.chen.a5}@dc.tohoku.ac.jp

あらまし 多数のアンテナ素子からなるアレーアンテナは、無線通信や無線電力伝送、レーダーなどに用いられている非常にポピュラーなアンテナである。このようなアレーアンテナの数値解析法としては、有限差分時間領域法 (Finite difference time domain, FDTD) 法, 有限要素法 (Finite element method, FEM), およびモーメント法 (Method of moments, MoM) などの手法がよく用いられている。本報告では、これらの手法の中でもモーメント法に着目し、アレーアンテナの数値解析へのその応用について述べる。はじめに、モーメント法の原理について説明し、FDTD 法や FEM のような手法との違いを示す。次に、アレーアンテナの数値解析に応用されるモーメント法として、Richmond のモーメント法と周期グリーン関数を用いたモーメント法について説明する。アレーアンテナの数値解析例を示し、それらの有効性を明らかにする。

キーワード モーメント法

[Tutorial Lecture] Numerical Analysis of Array Antenna Using Method of Moments

Keisuke KONNO[†] and Qiang CHEN[†]

[†] Communications Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University
6-6-05 Aramaki Aza Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi, 980-8579, Japan
E-mail: †{keisuke.konno.b5, qiang.chen.a5}@dc.tohoku.ac.jp

Abstract An array antenna which is composed of numerous antenna elements is a quite popular antenna and is applied to wireless communication, wireless power transfer, and radar. Finite difference time domain (FDTD) method, finite element method (FEM) and method of moments (MoM) have been used for numerical analysis of such array antennas. In this report, MoM and its application to numerical analysis of the array antennas are discussed. First, principles of MoM are described and its difference from FDTD method or FEM is demonstrated. Second, MoM using periodic Green's function is explained. Finally, numerical examples of the array antennas are shown and performance of the MoM is demonstrated.

Key words Method of moments

1. ま え が き

アレーアンテナは、アンテナ素子を多数配置したアンテナである。アレー開口面の励振位相分布を変えるとビーム走査が可能であり、アレー開口面の面積や励振振幅分布を変えると利得やサイドロブレベルを変えることができるなど、アンテナ素子単体では実現できない特性を得ることができる。このようなアレーアンテナは、同一素子を均一な素子間隔で配列した周期構造として実現されることが多く、無線通信や無線電力伝送、レーダーなどに応用されている。

アレーアンテナを数値解析するための様々な手法が知られ

ており、そのうちの 1 つがモーメント法 (Method of moments, MoM) である。モーメント法は境界要素法 (Boundary element method, BEM) とも呼ばれ、電磁波以外でも音波の分野などで用いられている。電磁界の分野におけるモーメント法は、シラキユース大学の Harrington によって 1960 年代に導入された [1]。同じ時期に、有限差分時間領域 (Finite difference time domain, FDTD) 法 [2] や有限要素法 (Finite element method, FEM) [3] も電磁界の分野にそれぞれ導入されている。モーメント法と FDTD 法、有限要素法の特徴や違いは表 1 に示す通りである。

Harrington によってモーメント法が導入された後、モーメント法に関する様々な研究が行われてきた。K. K. Mei は Hallen

表1 電磁界数値解析法の特徴.

| 数値解析法 | FDTD 法 | FEM | モーメント法 |
|--------|-------------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 解析領域 | 時間領域 | 周波数領域 | 周波数領域 |
| 未知数 | 空間の電磁界 (実数) | 空間の電界 (複素数) | 散乱体の電磁流 (複素数) |
| 離散化対象 | Maxwell 方程式 | 波動方程式等 | 電磁界の積分方程式 |
| 原理 | 差分法 | 重み付き残差法 | 重み付き残差法 |
| 仮想境界 | 必要 | 必要 | 不要 |
| メッシュ形状 | 空間を直方体分割 | 空間を四面体分割 | 散乱体を任意形状分割 |
| 逆行列 | 不要 (逐次解法) | 必要 (疎行列) | 必要 (密行列) |
| 計算機メモリ | $O(N)$ (N : セル数) | $O(N)$ (N : 要素数) | $O(N^2)$ (N : セグメント数) |
| 計算時間 | $O(NN_i)$ (N_i : 反復回数) | $O(NN_i)$ (N_i : 反復回数) | $O(N^3)$ |
| 特徴 | モデリングは低精度 (階段近似) 定式化・実装は容易 | モデリングが柔軟 定式化・実装は中難度 | 安定性・精度に優れる 定式化・実装が複雑 |
| 得意 | 誘電体, パルス応答, 過渡現象, 不均質構造 | 導波路, モード解析 | 曲線/曲面状アンテナ, 散乱問題, モード解析 |
| 不得意 | モード解析, 曲線/曲面状アンテナ | パルス応答, 非線形素子 | 誘電体, パルス応答, 非線形素子 |

の積分方程式をモーメント法で解き, 直線アンテナの数値解析を行った [4]. Richmond は, 区分正弦関数を用いたモーメント法を提案し, 折れ線アンテナや面状アンテナのワイヤグリッドモデルの数値解析を行った [5], [6]. K. M. Chen らは, 誘電体近傍アンテナを点整合法を用いたモーメント法で数値解析し, その特性を明らかにした [7], [8]. Rao, Wilton, Glisson らが面状アンテナの電流分布を展開する三角形状の基底関数, いわゆる RWG 関数を提案し, 面状アンテナの数値解析法を構築したのが 1980 年代のことである [9].

1990 年代以降は, モーメント法を高速化・省メモリ化し, 大規模なアンテナの数値解析に応用する試みがなされた. エール大学の V. Rokhlin によって提案された高速多重極法 (Fast Multipole Method, FMM) は, 代表的な高速化手法の 1 つである [10], [11]. FMM は, イリノイ大学の J. M. Jin と W. C. Chew らによって MLFMA (Multi-level fast multipole algorithm) として拡張され, 100 万円程度の連立方程式を近似的に解くのに応用された [12], [13]. この MLFMA は, 現在ではモーメント法ベースの電磁界シミュレータに広く搭載されるようになっている. また, ペンシルベニア州立大学の R. Mittra らは, Characteristic Basis Function Method (CBFM) という高速化手法を 2003 年に提案している [14]. FMM や MLFMA は, いわゆる反復法をベースにした手法であるのに対し, CBFM は直接法をベースにした手法である. 反復法は, 近似解を更新して真の解に近づけてゆく手法であるが, 直接法は大規模問題を小規模問題に圧縮し, その逆行列を直接求めて解を得る手法であるという違いがある. この時代は, モーメント法を含めた計算電磁気学が大きく発展し, 高度な手法が多数提案された他, 電磁界シミュレータの隆盛が著しい時代でもあった.

アレーアンテナの数値解析のためのモーメント法もこれまで盛んに研究されている. 周期グリーン関数を用い, アレーアンテナを無限周期構造とみなして数値解析するモーメント法が提案されている [15]-[21]. また, 大規模アレーアンテナの素子の電流分布がほとんど一様であるという性質を利用した数値解析法がいくつか提案されており, マイクロストリップアンテナの数値解析 [22]-[24] や, 宇宙太陽光利用システム (Space Solar

Power Systems) 用超大規模アンテナの数値解析 [25]-[28] などに応用されている. 可変負荷を装荷したアンテナのためのモーメント法の高速化も提案されており, アレーアンテナの数値解析に応用されている [29], [30].

本報告では, モーメント法およびそのアレーアンテナへの応用に関して述べる. まず, モーメント法を用いたアレーアンテナの数値解析の利点について述べる. 次に, アレーアンテナの数値解析でよく用いられる有限サイズと無限サイズのアレーアンテナのモデルについて, その特徴を述べる. そして, 有限サイズのアレーアンテナの数値解析法として, Richmond のモーメント法, 無限サイズのアレーアンテナの数値解析法として周期グリーン関数を用いたモーメント法に着目し, その原理や定式化について説明する. 最後に, 数値解析例をいくつか示し, それらの有効性を明らかにする.

2. モーメント法を用いたアレーアンテナの数値解析の利点

モーメント法の特徴は表 1 に示す通りであるが, このような特徴は, アレーアンテナの数値解析において以下のような利点をもたらす.

(1) モーメント法では, 空間の電磁界でなく散乱体の電磁流を未知数とするので, アレーアンテナの大きさが同じであれば, それらの間隔が離れていても計算コストは同じになる.

(2) モーメント法では, 無限大の反射板や誘電体スラブ, 無限周期構造など, 有限のメッシュでのモデリングが不可能な散乱体を, グリーン関数の形で解析的にモデリングできる.

1 つ目の利点は, 送受信アレーアンテナ間の無線通信や無線電力伝送など, 送受信アレーアンテナ同士の間隔を離して行う数値シミュレーションにおいて有効である. FDTD 法や有限要素法では, 未知数が空間の電磁界であることから, 送受信アレーアンテナ同士の間隔を離すと解析領域が広がり, 結果的に未知数も増えてしまう. その一方で, モーメント法ではアレーアンテナの電磁流が未知数となるので, アレーアンテナ同士の間隔が離れても, アレーアンテナの大きさが同じであれば, 未知数の数は変わらず, 計算コストも変わらない.

表2 アレーアンテナのモデリング手法.

| モデリング手法 | 有限アレー | 無限アレー |
|---------|-----------|---------|
| 解析モデル | アレーアンテナ全体 | 単位セル |
| 素子数 | 任意 | 無限 |
| 端効果 | 有 | 無 |
| 電磁界のモード | 球面波 | 平面波 |
| 励振振幅分布 | 任意 | 一様振幅 |
| 励振位相分布 | 任意 | 線形位相差付き |
| 計算コスト | 大 | 小 |

2つ目の利点は、マイクロストリップアレーアンテナや反射板上のアレーアンテナなど、波長に比べて非常に大きな散乱体である誘電体基板や反射板に裏打ちされたアレーアンテナの数値解析において有効である。また、無限に近い非常に多くの素子を有するアレーアンテナの数値解析にも有効である。これらの散乱体をメッシュに分割すると、それだけで未知数の数が膨大となり、数値解析が困難になるが、グリーン関数の形でこれらの散乱体をモデリングすることで、メッシュ分割が不要となり、計算コストが削減できる。このような散乱体のモデリングの方法は、波源と観測点の相互作用をグリーン関数で記述するモーメント法独自のものであり、電磁界を直接扱うFDTD法や有限要素法にはない特徴である。

これらの他にも、任意形状のメッシュ分割が可能であることによるアンテナが高精度にモデリングできること、アレーアンテナの性質や周期性を用いた高速化が可能であることなどの利点もある。

3. 有限アレーと無限アレー

アレーアンテナのモデリングは、アレーを有限アレーとしてモデリングする方法と無限アレーとしてモデリングする方法の2種類がある。それぞれの利点や欠点、特徴は表2に示す通りである。

有限アレーによるモデリングは、小規模から大規模まで任意の素子数のアレーアンテナの数値解析に利用できる。また、得られる電磁界のモードは球面波であり、励振振幅分布や励振位相分布も自由に設定できるので、テーパ付き給電や位相差付給電を与えたときの指向性がサイドローブも含めて得られる。その一方で、アレーアンテナ全体をメッシュに分割して数値解析を行うことになるので、計算コストは大きい。

無限アレーによるモデリングは、非常に多数の素子を有する大規模アレーアンテナの数値解析に利用できる。後述する周期グリーン関数を用いるので、メッシュに分割するのはアレーアンテナ全体ではなく、単位セルと呼ばれる無限周期構造中にある1つの素子のみである。したがって、計算コストは小さい。その一方で、無限アレーのモデルから得られる電磁界のモードは平面波であるので、サイドローブなどの情報は数値解析結果から直接得ることはできず、アレーファクタなどを用いた近似計算に頼ることになる。アレーアンテナ中に含まれる素子の特性は、アレー端部から離れた位置にある素子であればほとんど同じになることが知られており、大規模のアレーアンテナであ

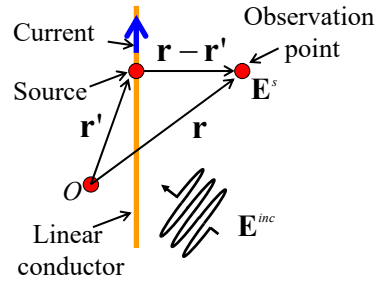


図1 電界積分方程式の座標系.

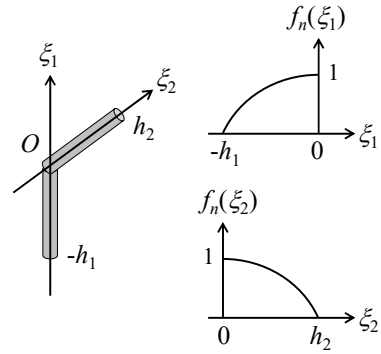


図2 Richmond のモーメント法で用いる折れ線セグメントの座標系と基底関数.

ればほとんどの素子は端部から離れた位置にあることから、無限アレーによるモデリングはよい近似になる。

4. Richmond のモーメント法

Richmond のモーメント法は、線状アンテナのためのモーメント法であり、図1に示すような座標系における以下の電界積分方程式を解くための手法である [5], [6].

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \iiint_V \overline{\overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{r}' は波源の位置ベクトル、 \mathbf{r} は観測点の位置ベクトル、 $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$ は観測点における入射電界、 $\overline{\overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は自由空間のダイアドックグリーン関数である。 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ は波源における未知の電流ベクトルであり、Richmond のモーメント法ではこれを求めることになる。Richmond のモーメント法では、以下のような区分正弦関数を用いて未知の電流分布を表現する。

$$\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \frac{\sin k_0(h_1 + \xi_1)}{\sin k_0 h_1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 & \text{where } -h_1 \leq \xi_1 \leq 0 \\ \frac{\sin k_0(h_2 - \xi_2)}{\sin k_0 h_2} \hat{\boldsymbol{\xi}}_2 & \text{where } 0 \leq \xi_2 \leq h_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2)$$

このような区分正弦関数を用いると、線状アンテナの電流分布は折れ線状の電流分布で近似することができ、面状のアンテナであればワイヤグリッドとしてモデリングすることが可能である。Richmond のモーメント法は、有限のアレーアンテナの数値解析に応用することができる。

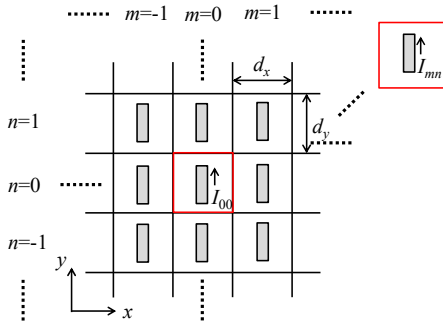


図3 2次元の無限周期構造.

5. 周期グリーン関数を用いたモーメント法

周期グリーン関数を用いたモーメント法は、無限周期構造のためのモーメント法である。図3に示す2次元の無限周期構造を考える。このような無限周期構造中にある素子の電流は、位相差を除いて一樣になることが知られており、これを Floquet の定理と呼ぶ[15]。Floquet の定理にしたがうと、第 mn 素子の電流は以下のように表される。

$$I_{mn} = I_{00} e^{-jk_0 \sin \theta \cos \phi m d_x} e^{-jk_0 \sin \theta \sin \phi n d_y} \quad (3)$$

ここで I_{00} は $m = n = 0$ に相当する素子の電流である。(3)式における未知数は I_{00} のみであるから、無限周期構造中にある素子の電流は、 I_{00} が分かれば全て分かることになる。したがって、Floquet の定理から、「無限周期構造にある全ての素子の電流を求めよ」という問題は、「無限周期構造にある1つの素子の電流を求めよ」という問題に帰着される。このとき、 $m = n = 0$ に相当する素子を単位セルと呼ぶ。

無限周期構造中にある素子の電流が Floquet の定理にしたがうとき、第 mn セルにおける波源と観測点の間のグリーン関数は、以下のように表すことができる。

$$G_{mn} = \frac{e^{-jk_0 R_{mn}}}{4\pi R_{mn}} e^{-jk_0 \sin \theta \cos \phi m d_x} e^{-jk_0 \sin \theta \sin \phi n d_y} \quad (4)$$

ただし、

$$R_{mn} = \sqrt{(x' - x - m d_x)^2 + (y' - y - n d_y)^2 + (z' - z)^2} \quad (5)$$

であり、 (x', y', z') および (x, y, z) は、それぞれ単位セル(第00セル)内における波源と観測点の座標である。したがって、2次元の無限周期構造に対応したスカラグリーン関数は、(5)式を全ての m と n に関して加算することで、以下のように表現できる。

$$G_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_{mn}}}{4\pi R_{mn}} e^{-jk_0 \sin \theta \cos \phi m d_x} e^{-jk_0 \sin \theta \sin \phi n d_y} \quad (6)$$

(6)式は周期グリーン関数(あるいは2次元無限周期構造のグリーン関数)と呼ばれ、 R_{mn} に含まれる波源と観測点の座標が単位セル内のそれであることから、無限周期構造のグリーン関数が単位セルのグリーン関数として表現されている[16]。(6)式

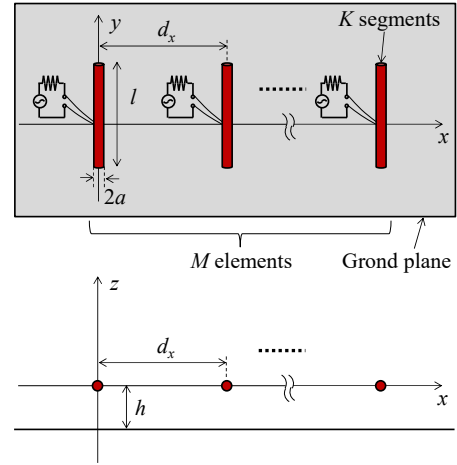


図4 反射板付き1次元ダイポールアレーアンテナ.

は空間領域で表現されており、無限級数の形をしているが、収束性は非常に悪い。したがって、波源と観測点の相互作用の数値計算に(6)式が直接用いられることはなく、Poisson の和公式を用いて得られるスペクトル領域の表現とのハイブリッド表現、すなわち Ewald 変換を用いた表現がよく用いられる。詳細は煩雑なので省略するが、興味のある読者は文献を参考にされたい[17]-[21]。ここでは、周期グリーン関数に、RWG 関数を組み合わせたモーメント法を用いる[9]。

6. 数値計算結果

6.1 反射板付きダイポールアレーアンテナ

有限のアレーアンテナの数値解析における Richmond のモーメント法の有効性を明らかにするため、図4に示すような反射板付き1次元ダイポールアレーアンテナの数値解析を行う。反射板の大きさは無限大とし、鏡像法を用いてモデリングした。アレーアンテナの励振分布は、一様励振および10 dB テーパをかけたガウス分布をそれぞれ与えた。

動作インピーダンスの数値解析結果を図5に示す。アレーアンテナの端部付近にある素子の動作インピーダンスの値が振動し、中央部にある素子のそれはほとんど一定になっている。これは有限サイズのアレーアンテナに生じる端効果によるものであり、前述の通りである。また、アレーアンテナの動作インピーダンスは給電振幅分布によらずほとんど一定であることが分かるが、これは過去の研究でも指摘されている通りである[31]。

動作利得の数値解析結果を図6に示す。動作インピーダンスと異なり、動作利得は給電振幅分布によって大きく変わることが分かる。給電振幅分布が一様ときはサイドローレベルが高くなっている一方で、給電振幅分布がテーパ分布のときはサイドローレベルが低くなっている。その一方で、給電振幅分布が一様ときは主ビームの利得が高く、ビーム幅が狭くなっており、給電振幅分布がテーパ分布のときは主ビームの利得が低く、ビーム幅が広がる。このように、有限のアレーの指向性は、給電振幅分布によって大きく変化することが知られており、有限のアレーを数値解析すると、その影響を知ることができる。

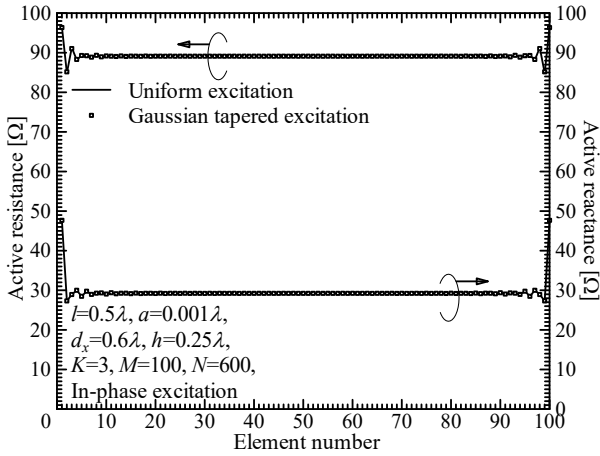


図5 反射板付き1次元ダイポールアレーアンテナの動作インピーダンス。

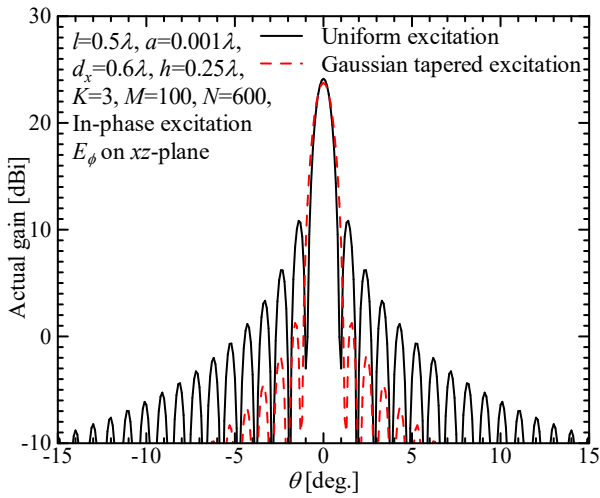


図6 反射板付き1次元ダイポールアレーアンテナの動作利得。

以上のように、Richmondのモーメント法を用いると、端効果や給電振幅分布が有限のアレーアンテナの特性におよぼす影響を明らかにすることができる。

6.2 リフレクタレー

ここでは、周期グリーン関数を用いたモーメント法の有効性を明らかにするため、無限アレーの反射係数を求め、有限のリフレクタレーの設計を行う[32]。まず、反射板付きの面状ダイポール素子からなる2次元無限周期構造の反射係数を数値的に求める。面状ダイポール素子に平面波を入射し、素子長を変えたときの反射係数の位相の数値解析結果を図7に示す。前述の通り、無限周期構造の電磁界モードは平面波であるので、この数値解析で得られる面状ダイポールからの電界の向き(すなわち反射電界の反射角)は、Snellの法則にしたがう。面状ダイポールから生じる反射電界と入射電界の比を取り、その位相を求めたのが図7の結果である。図7に示す通り、素子長に対して反射係数の位相が変化しており、おおむね 270° ほどの変化量が実現できていることが分かる。得られた反射係数の位相と以下の式を用いて、図8に示すリフレクタレーの素子長を決定する。

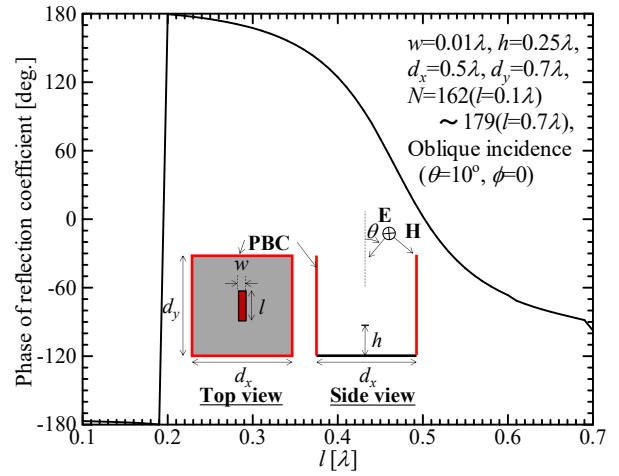


図7 反射板付き2次元無限周期面状ダイポールアレーの反射係数。

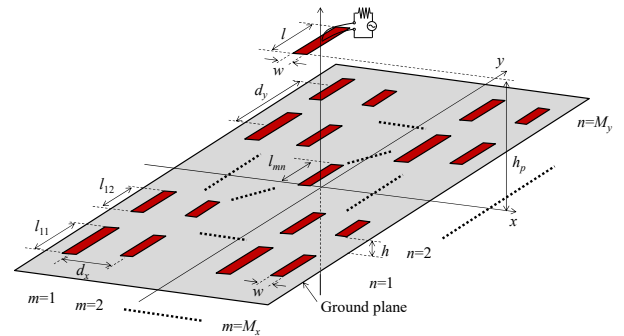


図8 反射板付き面状ダイポール素子からなるリフレクタレー。

$$-k_0|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{mn}| + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{mn} + \phi(l_{mn}) = \text{Const.} \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{r}_s は一次放射器の中心の位置ベクトル、 \mathbf{r}_{mn} は第 mn リフレクタレー素子の中心の位置ベクトル、 $\mathbf{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ は主ビーム方向 (θ, ϕ) に対応した波数ベクトル、 $\phi(l_{mn})$ は第 mn 素子の長さ l_{mn} に対応した反射係数の位相である。(7)式は、 (θ, ϕ) 方向における第 mn 素子の電界の位相を表す。 (θ, ϕ) 方向で全ての素子電界が同相になるように l_{mn} を与えれば、その方向に主ビームが形成できる。図9に、設計したリフレクタレーの規格化散乱パターンを示す。なお、ここではリフレクタレーを多層媒質のグリーン関数を用いたモーメント法で数値解析している。リフレクタレーは、 $(\theta, \phi) = (10^\circ, 0)$ 方向へ主ビームが向くように設計されているが、設計通りの方向に主ビームが向いていることが分かる。

以上のように、周期グリーン関数を用いたモーメント法により得られた無限アレーの反射係数の位相から、有限のリフレクタレーが設計できた。このことは、無限アレーの反射係数の位相が、有限のリフレクタレー中にある素子の散乱電界の位相をよく近似していることを示している。

7. まとめ

本報告では、モーメント法およびそのアレーアンテナへの応用に関して述べた。モーメント法を用いたアレーアンテナの数値解析の利点について述べ、有限アレーと無限アレーのモデル

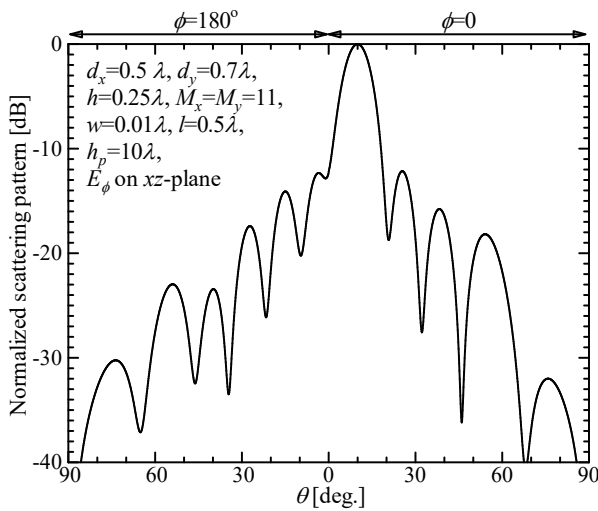


図9 リフレクタレーの規格化散乱パターン。

の比較を行った。有限サイズのアレーアンテナの数値解析法として、Richmondのモーメント法、無限サイズのアレーアンテナの数値解析法として周期グリーン関数を用いたモーメント法にそれぞれ着目し、その原理や定式化について述べた。最後に、アレーアンテナとリフレクタレーの数値解析結果を示し、それらの有効性を明らかにした。

謝辞 本研究はJSPS科研費22K04061の助成を受けたものである。本研究の一部は、東北大学電気通信研究所共同プロジェクト研究により実施されたものである。

文 献

[1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, 1968.

[2] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 14, no. 3, pp. 302-307, May 1966.

[3] P. P. Silvester, "Finite element solution of homogeneous waveguide problems," *Alta Freq.*, vol. 38, pp. 313-317, May 1969.

[4] K. K. Mei, "On the integral equations of thin wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 13, no. 3, pp. 374-378, May 1965.

[5] J. H. Richmond and N. H. Geary, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-23, no. 3, pp. 412-414, May 1975.

[6] C. W. Chuang, J. H. Richmond, N. Wang, and P. H. Pathak, "New expressions for mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal monopoles," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 38, no. 2, pp. 275-276, Feb. 1990.

[7] D. E. Livesay and K. M. Chen, "Electromagnetic fields induced inside arbitrarily shaped biological bodies," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-22, no. 12, pp. 1273-1280, Dec. 1974.

[8] D. P. Nyquist, K. M. Chen, and B. S. Guru, "Coupling between small thin-wire antennas and a biological body," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-25, no. 6, pp. 863-866, Nov. 1977.

[9] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-30, no. 3, pp. 409-418, May 1982.

[10] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions," *J. Comput. Phys.*, vol. 86, no. 2, pp. 414-439, Feb. 1990.

[11] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 35, no. 3, pp. 7-12, June 1993.

[12] J. M. Song and W. C. Chew, "Multilevel fast-multipole algorithm for

solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 14-19, Sept. 1995.

[13] J. M. Song, C. C. Lu, and W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 10, pp. 1488-1493, Oct. 1997.

[14] V. V. S. Prakash and R. Mittra, "Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 36, no. 2, pp. 95-100, Jan. 2003.

[15] M. G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques," *Annale École Normale Supérieure*, pp. 47-88, 1883.

[16] B. A. Munk, *Frequency Selective Surfaces: Theory and Design*, New York, NY, USA: Wiley, 2000.

[17] A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

[18] H. Bateman, *Table of Integral Transforms*, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.

[19] P. P. Ewald, "Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern (Kristallen)," *Dissertation, München*, 1912, also *Ann. Phys.* 49, p. 1, 1916.

[20] P. P. Ewald, "Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale," *Ann. Phys.* 64, pp. 253-287, 1921.

[21] T. F. Eibert, J. L. Volakis, D. R. Wilton and D. R. Jackson, "Hybrid FE/BI modeling of 3-D doubly periodic structures utilizing triangular prismatic elements and an MPIE formulation accelerated by the Ewald transformation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 5, pp. 843-850, May 1999.

[22] K. Konno, Q. Chen, and R. J. Burkholder, "Numerical Analysis of Finite Periodic Array Antenna Using Novel Characteristic Basis Function Method," *Proc. IEEE AP-S Int. Symp.*, pp. 49-50, June-July, 2016.

[23] K. Konno, Q. Chen and R. J. Burkholder, "Numerical Analysis of Large-Scale Finite Periodic Arrays Using a Macro Block-Characteristic Basis Function Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 65, no. 10, Oct. pp. 5348-5355, 2017.

[24] K. Konno and Q. Chen, "A Study of Novel Characteristic Basis Function Method for Numerical Analysis of Large-Scale Finite Planar Periodic Arrays," *Proc. ICCEM, WE-OP.4P.6*, pp. 1-2, March, 2018.

[25] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, "Analysis of huge-scale periodic array antenna for SSPS using impedance extension method," *Proc. IEICE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, pp. 33-36, July 2009.

[26] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, "Analysis of huge-scale periodic array antenna using impedance extension method," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E92-B, no. 12, pp. 3869-3874, Dec. 2009.

[27] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, "Application of impedance extension method to 2D large-scale periodic array antenna with faulty elements," *Proc. IEICE Int. Symp. Antennas. Propag.*, 47, pp. 1-4, Nov. 2010.

[28] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, "Statistical analysis of huge-scale periodic array antenna including randomly distributed faulty elements," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E94-C, no. 10, pp. 1611-1617, Oct. 2011.

[29] K. Konno, Q. Yuan, Q. Chen, K. Yokokawa, J. Goto, and T. Fukawasa, "Efficient Method of Moments for Numerical Analysis of Antennas with Variable Load Impedance," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 68, no. 12, pp. 8233-8237, Dec. 2020.

[30] K. Konno, Q. Yuan, Q. Chen, K. Yokokawa, J. Goto and T. Fukawasa, "Application of An Efficient Method of Moments to Numerical Analysis of 1-bit Transmitarrays," *Proc. ISAP2020*, Jan. 2021.

[31] A. Ishimaru, R. J. Coe, G. E. Miller, and W. P. Geren, "Finite periodic structure approach to large scanning array problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-33, no. 11, pp. 1213-1220, Nov. 1985.

[32] J. Huang and J. A. Encinar, *Reflectarray Antennas*, John Wiley and Sons, 2008.