一般社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
A・P2020-17(2020-07)

自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方界近似を用いたモーメント法によるアレーアンテナの数値解析

煤賀　司†　今野　佳祐†　陳　強†

†東北大学大学院　工学研究科　通信工学専攻　〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
E-mail:　†{susuga-t, konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし　大規模なアレーアンテナの数値解析は計算コストが高いため，計算の高速化および省メモリ化が不可欠である．本研究では，自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方界近似を用いたモーメント法を提案し，その精度と計算コストを数値的に明らかにする．提案手法は相互インピーダンスの表示式における波源の寄与と観測点の寄与が分離されている．その結果，互いに十分離れた位置にある電流セグメント間の相互作用をまとめて計算することができ，高速化が期待できる．提案法により 2 次元周期的アレーアンテナの数値解析を行い，その精度や計算コストを明らかにすることで本手法の有効性を示す．

キーワード　モーメント法，ダイアディックグリーン関数，相互インピーダンス，アレーアンテナ

Numerical Analysis of Array Antennas Using Method of Moments Based on Far-Field Approximation of a Dyadic Green's Function in Free Space.

Tsukasa SUSUGA†　Keisuke KONNO†　and　Qiang CHEN†

†Department Communications Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University
Aramaki Aza Aoba 6-6-05, Aoba-ku, Sendai, 980–8579, Japan
E-mail:　†{susuga-t, konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract The numerical analysis of a large-scale array antenna is computationally expensive, so it is essential to speed up the computation. In this research, we propose a fast method of moments using the far-field approximation of the dyadic green function in free space and numerically demonstrate its effectiveness. The proposed method enables to deal with the contribution of the wave source and observation points to the mutual impedance, separately. As a result, the proposed method can compute the mutual coupling among current segments that are far from each other collectively and short CPU time is expected. Numerical analysis of two-dimensional periodic array antennas is performed by the proposed method, and the effectiveness of the method is shown via its accuracy and computational cost.

Keywords　Method of moments (MoM), Dyadic green function, Mutual impedance, Array antenna

1. 背景

アンテナや散乱体表面の電流分布などを求めるための電磁界解析手法の 1 つにモーメント法[1][2](Method of Moments, MoM)が挙げられる．モーメント法ではアンテナ及び散乱体の表面を流れる電流を N 個のセグメントに分割し，セグメント上の未知の電流係数を求めることで電磁界を解析する．このとき電界積分方程式を離散化し，行列方程式 **V**=**ZI** に変換して解く．ここで V は…，Z は…，I は…である．このようにして得られた行列方程式はガウスの消去法や掃き出し法などの直接法を用いて解くことができる．そのときの逆行列を求めるための計算時間は $O(N^3)$になり計算機メモリは $N\times N$ のインピーダンス行列を保存するため $O(N^2)$となり，計算コストが大きい．一方，共役勾配法（Conjugate Gradient, CG）法に代表されるような反復法を用いて行列方程式を解くと，1 反復当たりの計算時間が $O(N^2)$となる．反復回数が N によらなければ全体の計算時間を $O(N^2)$に抑えることができるが $N\times N$ のインピーダンス行列を保存する必要があることから計算機メモリは $O(N^2)$のままで削減できない．

これまでの研究では，CG 法の行列-ベクトル積の計算に高速多重極法[3] (Fast Multipole Method, FMM)を用いた CG-FMM や Fast Dipole Method [4] (FDM)が提案されている．

FMM は電流セグメントのグループ分けをし，遠方グループ間の相互作用の計算をまとめて行う手法である．CG 法と組み合わせることで 1 反復当たりの計算時間と計算機メモリを $O(N^{1.5})$に削減できるが総セグメント数 N とグループ内セグメント数 K が $K=\sqrt{N}$の関係でなければならない．また，定式化が複雑であり実装が

容易ではないという課題もある.

FDM は, 互いに離れたセグメントを微小ダイポールに近似して相互結合を計算する手法である. FMM 同様計算時間と計算機メモリを $O(N^{1.5})$に削減できるが, 集約-変換-分配のアルゴリズムにおいてベッセル関数やルジャンドル多項式等の複雑な計算を要さないため, 実装が容易であるという利点がある. 一方で, 折れ線形状のセグメントを直線状の微小ダイポールに近似することで誤差が生じるという問題がある.

本研究では自由空間のダイアディックグリーン関数に遠方界近似を導入することで FMM のように遠方グループ間の相互作用がまとめて計算可能となる手法を提案する. 提案法は FMM のように特殊関数を用いることはなく, アルゴリズムがシンプルである. , また, FDM のようなセグメント形状の近似は行わない. 提案法は, 後述する条件下においては計算時間と計算機メモリが $O(N^{1.5})$を下回る.

本報告では提案手法で 2 次元周期的アレーアンテナを解析し解の収束性およびグループ数に対する計算時間と計算機メモリの関係性を検討した.

2. 数値解析の原理

2.1. CG 法

モーメント法により得られた行列方程式 **V**=**ZI** を解くアルゴリズムは次の通りである.

電流ベクトル **I** の初期値を $\mathbf{I}_0$ とし, 残差ベクトル **R** 及び解の修正ベクトル **P** の初期値 $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{P}_0$ を次のように求める.

$$\mathbf{R}_0 = Z\mathbf{I_0} - \mathbf{V}$$

$$\mathbf{P}_1 = -Z^{\dagger}\mathbf{R_0}$$

次に以下の反復処理を行う.

$$\alpha_i = -\frac{\langle Z\mathbf{P}_i, \mathbf{R}_{i-1}\rangle}{\parallel Z\mathbf{P}_i \parallel^2} = \frac{\parallel Z^{\dagger}\mathbf{R}_{i-1} \parallel^2}{\parallel Z\mathbf{P}_i \parallel^2}$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{R}_i = Z\mathbf{I}_i - \mathbf{V} = \mathbf{R}_{i-1} + \alpha_i Z\mathbf{P}_i$$

$$\beta_i = \frac{\parallel Z^{\dagger}\mathbf{R}_i \parallel^2}{\parallel Z^{\dagger}\mathbf{R}_{i-1} \parallel^2}$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = -Z^{\dagger}\mathbf{R}_i + \beta_i \mathbf{P}_i$$

ここで, α_iとβ_iはそれぞれ電流ベクトル$\mathbf{I}_i$と修正ベクトル$\mathbf{P}_i$の修正係数であり$Z^{\dagger}$はZの共役転置行列である. 上記のアルゴリズムにおいて反復処理 1 回につきZ行列とベクトルの積を計算するため計算時間は$O(N^2)$である. またZ行列を保存するため計算機メモリも$O(N^2)$となる.

2.2. 遠方界近似を用いた自由空間の ダイアディックグリーン関数による 相互インピーダンスの表示式

今, 自由空間に長さ $2l$ の微小ダイポール素子が 2 つ波長に比べて十分に離れた位置にあるとする. この時の微小ダイポール素子間の相互インピーダンスは(1)式のように表されることが分かっている[6]. (1)式を用いて図 1 に示すようにセグメントをグループ化してまとめて計算をする.

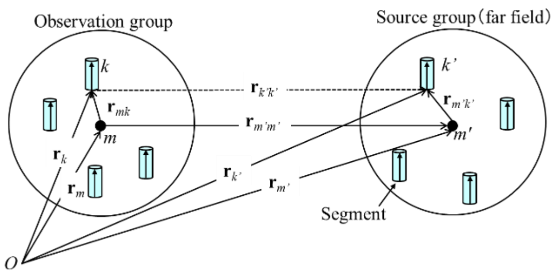


図 1 セグメントのグループ化

$$z_{mn} = j\omega\mu_0 \int_{-l}^{l} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \int_{-l}^{l} \bar{\bar{G}}^{\mathrm{re}} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})\, \mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r}' \qquad (1)$$

$$\bar{\bar{G}}^{\mathrm{re}} = \mathrm{e}^{-jk_0(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{r})} \frac{\mathrm{e}^{-jk_0R}}{4\pi R} \begin{bmatrix} F_{xx'} & F_{xy'} & F_{xz'} \\ F_{yx'} & F_{yy'} & F_{yz'} \\ F_{zx'} & F_{zy'} & F_{zz'} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{jk_0(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{r}')} \qquad (2)$$

$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$は基底関数であり$\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$は試行関数である. $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{t}}$, $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}$は電波の到来方向, 放射方向を表す単位ベクトルである. $\bar{\bar{G}}^{\mathrm{re}}$は自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方における近似表現であり, (2)式は波源, 伝搬経路, 観測点の 3 つの要素に分解が可能である. 今, m,m'を波源グループ及び観測点のグループの番号とし, k,k'を m,m'が示すグループ内のセグメント番号とする. また l_{mk} と $l_{m'k'}$を観測点と波源に沿う積分路とすると(1)式は次の様に表される.

$$z^{far}_{mkm'k'} = j\omega\mu_0 \int_{l_{mk}} \mathbf{f}_{mk}(\mathbf{r}) \cdot \int_{l_{m'k'}} \bar{\bar{G}}^{\mathrm{re}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_{m'k'}(\mathbf{r}')\, \mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r}' \qquad (3)$$

ここで

$$\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{t}}) = \int_{l_{mk}} \mathrm{e}^{jk_0(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{r}_{mk})} \mathbf{f}_{mk}(\mathbf{r}_k)\, \mathrm{d}\mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}) = \int_{l_{m'k'}} \mathrm{e}^{-jk_0(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{r}_{m'k'})} \mathbf{f}_{m'k'}(\mathbf{r}_{k'})\, \mathrm{d}\mathbf{r}_{k'}$$

$$T_{mm'} = \frac{\mathrm{e}^{-jk_0R}}{4\pi R} \begin{bmatrix} F_{xx'} & F_{xy'} & F_{xz'} \\ F_{yx'} & F_{yy'} & F_{yz'} \\ F_{zx'} & F_{zy'} & F_{zz'} \end{bmatrix}$$

とすると遠方セグメント間の相互インピーダンスと電流ベクトルの積をまとめて計算する処理は次のようになる. また電流セグメント数を N, 素子数を M, アレーアンテナの素子の分割数を K, 各グループの持つ電波の放射方向及び到来方向の数を M'とすると計算時間及び計算機メモリは表 1, 2 のようになる.

STEP.1 m'番目の波源グループ内の波源セグメントと波源グループ中心までの相互作用を求める.

$$\mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}) = \sum_{k'=1}^{K} \mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}) a_{k'}$$

STEP.2　m 番目の観測グループ中心から見て遠方にある全ての波源グループの相互作用を求める．

$$\mathbf{S}_{m}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}) = \sum_{m' \in M_{far}} \mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}}) T_{mm'}$$

STEP.3　観測グループの中心から，観測セグメントまでの相互作用を求める．

$$\sum Z_{ij}^{far} = jk_0 Z_0\, \mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{t}}) \cdot \mathbf{S}_{m}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}})$$

表 1　相互作用の計算に要する計算時間．

	STEP	Order of CPU time
Near interaction		$O(N^2/M)$
Far interaction	STEP1	$O(M' \times N)$
	STEP2	$O(M^2)$
	STEP3	$O(M' \times N)$

表 2　相互作用の計算に要するメモリ．

Stored contents	Required memory
$\mathbf{V},\mathbf{I},\mathbf{P},\mathbf{R}$	$O(N)$
$Z_{mkm'k'}^{\mathrm{near}}$	$O(K \times N)$
$\mathbf{s}_{mk}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{t}})$ and $\mathbf{s}_{m'k'}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{r}})$	$O(M' \times N)$

M'が一定と仮定すると，$M=N^{2/3}$ となるようにグループ分けをすれば，CG 法における 1 ステップの計算時間および必要な計算機メモリが $O(N^{4/3})$となる．

2.3. 電波の放射方向及び到来方向の削減

(3)式の相互インピーダンスの表示式で計算する場合，電波の放射方向及び到来方向を削減することで更なる高速化が期待できる．例として図 2 のように，グループ m からグループ m_1,m_2 を見た時のベクトルが $\mathbf{R}_{t1},\mathbf{R}_{t2}$ である場合を考える．2 つのベクトルがなす角 θ が閾値 θ_m より小さければ 2 つのベクトルの重心を向く単位ベクトルを(4)式に従い作成する．これによりグループ m から見た放射方向，到来方向を削減できる．

$$\hat{\mathbf{R}}_{t12} = \frac{\mathbf{R}_{t1} + \mathbf{R}_{t2}}{|\mathbf{R}_{t1} + \mathbf{R}_{t2}|} \quad (4)$$

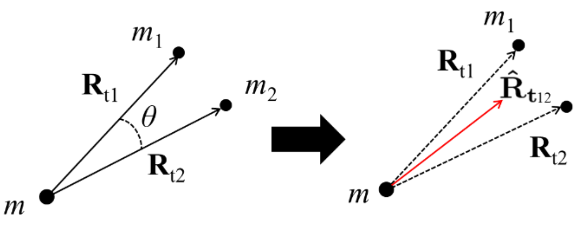


図 2 放射方向，到来方向の削減．

3.　2 次元周期的アレーアンテナの動作インピーダンスの収束性

提案手法を 2 次元周期的アレーアンテナに適用したときの動作インピーダンスの収束性を明らかにする．図 3 のようにダイポールセグメントを 2 次元平面状に周期的に配置し，相互インピーダンスを求めた．ダイポール長 l は 0.5λ，ダイポールの直径 a は 0.001λ，素子間隔は 0.5λ である．素子数を 10×10 とし，そのうちの 10 素子分の動作抵抗，動作リアクタンスを図 4,5 に示す．近傍，遠方を判別する閾値 d_m [l/λ]を 0.5λ で変化させ妥当な閾値を定めた後，角度に関する閾値 θ_m [degree] を 2 度刻みで変化させ比較した．

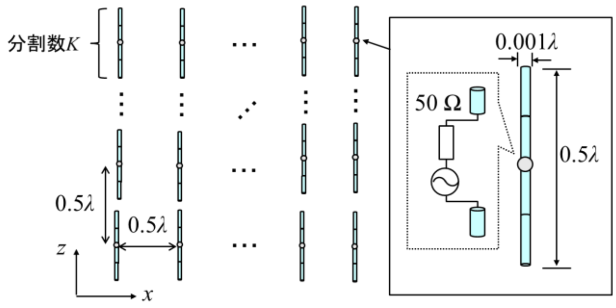
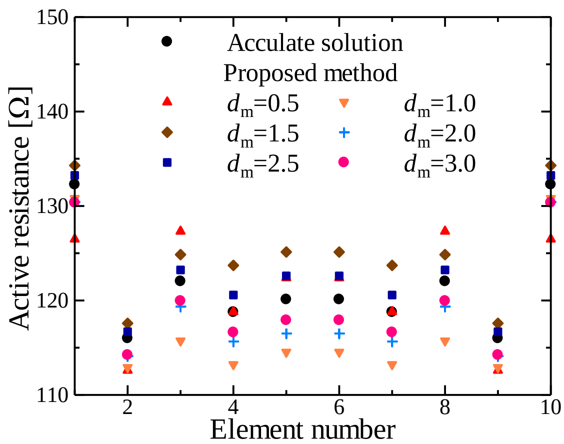
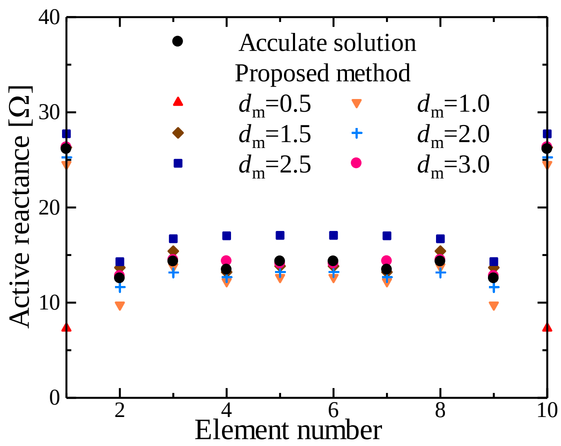


図 3　2 次元平面アレーアンテナ．

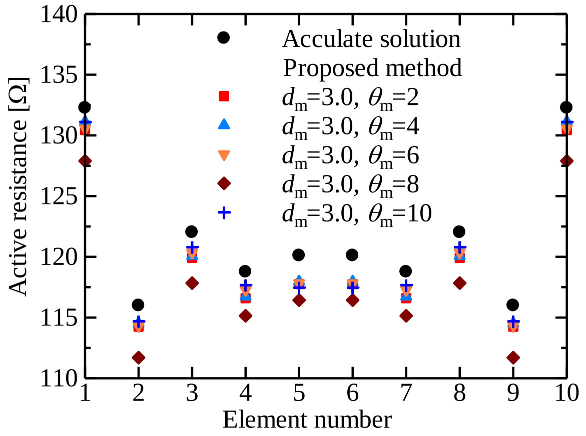


(a) d_m を変化させたときの動作抵抗の比較．

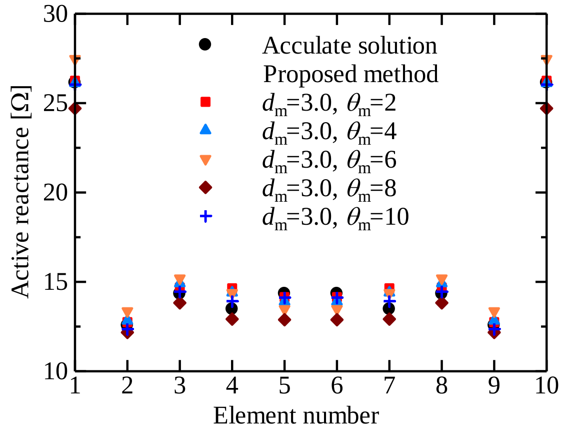


(a) d_m を変化させたときの動作リアクタンスの比較．

図 4 d_m の変化による動作インピーダンスの比較.



(a) θ_m を変化させたときの動作抵抗の比較.



(b) θ_m を変化させたときの動作リアクタンスの比較.

図 5 θ_m の変化による動作インピーダンスの比較.

図 4 から，距離閾値 d_m [l/λ]が小さいほど誤差が大きくなることがわかる．これは近傍にある素子間の近傍界による影響が無視されたために生じた誤差であると考えられる．図 5 から，角度閾値 θ_m [degree]を大きくすると厳密な動作インピーダンスと比較し誤差が大きくなることが分かる．これは θ_m が大きくなることで波源からの放射方向，および素子への電波の到来方向が粗く近似され，位相及び振幅に含まれる誤差が大きくなったためであると考えられる．

4. 2 次元周期的アレーアンテナにおける提案手法の計算時間および使用メモリ

本手法の 2 次元平面アレーアンテナにおける計算時間及び必要な計算機メモリを明らかにする．分割数を K=3 とし素子数 M を増加させたときの 2 次元周期的アレーアンテナの数値計算に要する計算時間と計算機メモリを図 6,7 に示す．

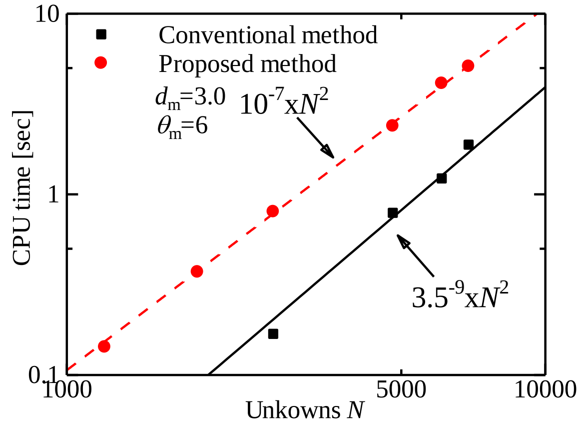


図 6 1 反復当たりの計算時間.

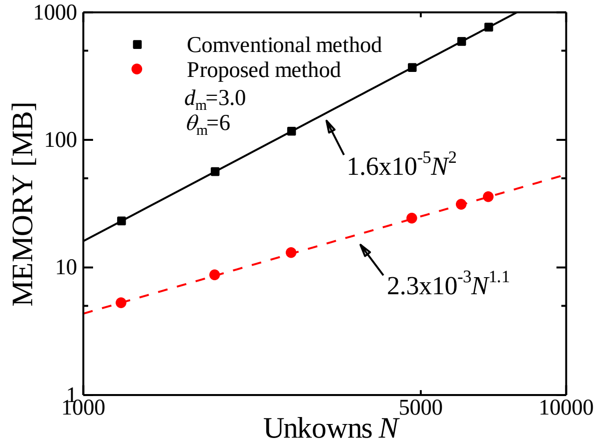


図 7 計算機メモリ

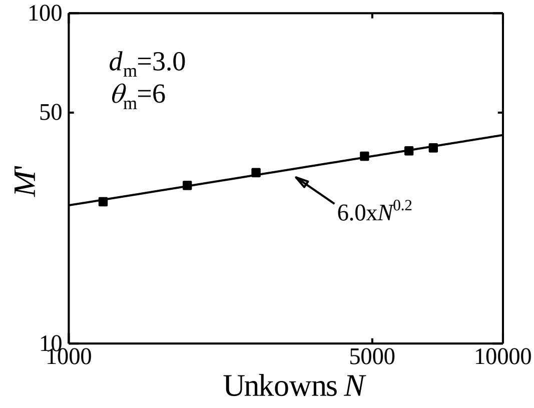


図 8 M'の推移

図 6 より，提案手法における CG 法の 1 反復当たりの計算時間は $O(N^2)$となり，従来の計算方法と同等のオーダーであった．これは，本報告における数値計算対象が $N \gg K$かつ N の増大によらず K を一定としたモデルであり，表 1 に示される STEP.2 の計算時間である $O(M^2) = O(N^2/K^2)$がおおよそ $O(N^2)$のオーダーになったためであると考えられる．また図 7 より，提案手法が要する計算機メモリは $O(N^{1.1})$となり従来法の $O(N^2)$よりも削減されていることが分かる．

図 8 の M'の推移より N が 1000 から 10000 の間では，計算機メモリは $O(N^{1.2})$となるはずであるが，実際は $O(N^{1.1})$となった．表 2 より近傍セグメント間の相互インピーダンスを保存する場合，そのオーダーは $O(K \times N)$で表されるが，距離閾値 d_m を定めているため近傍にあるセグメント数は K よりも大きくなる．図 6,7 における条件では近傍セグメント間の相互インピーダンスを保存する割合が全体の使用メモリの約 90％を占めていたため $O(N)$に近いオーダーになったと考えられる．

5. むすび

本報告では自由空間のダイアディックグリーン関数に遠方界近似を導入することで，電流セグメント間の相互インピーダンス作用をグループ単位で計算可能にする手法を提案し，2 次元周期的アレーアンテナの数値解析を行い，計算時間及びメモリに関して検討した．その結果，計算時間は従来の $O(N^2)$であったが，メモリは削減可能であることが判明した．

今後は各々の素子の形状が異なるリフレクトアレーアンテナのような準周期構造などにも本手法を適用していく予定である．

謝　辞

本研究成果に関し，東北大学サイバーサイエンスセンターから研究に関するアドバイスを頂いた．ここに感謝する．また，本研究成果の一部は JSPS 科研費 18K13736 の助成を受けて得られた．

文　献

[1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.

[2] J. H. Richmond and N. H. Greay, “Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles,” IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 23, No.5, pp. 412-414, May. 1975

[3] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, “The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription,” IEEE Antennas Propag. Mag., vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.

[4] X. Chen, C. Gu, Z,Niu, and Z. Li, ”Fast Dipole Method for Electromagnetic Scattering From Perfect Electric Conducting Targets” IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 60, No. 2, pp. 1186-1191, February 2012.

[5] J. Yeo, S. Köksoy, V. V. S. Prakash, and R. Mittra ”Efficient Generation of Method of Moments Matrices Using the Characteristic Function Method,” IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 52, No. 12, December 2004.

[6] 煤賀　司，今野　佳祐，陳　強，”自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方界近似とそのモーメント法への応用,” 信学技，vol. 119, no. 228, AP2019-96, pp. 85-88, 2019 年 10 月.