

自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方界近似と そのモーメント法への応用

煤賀 司[†] 今野 佳祐[†] 陳 強[†]

[†] 東北大学大学院 工学研究科 通信工学専攻 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05

E-mail: [†] {susuga-t, konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし モーメント法による大規模アンテナの数値解析の計算時間は長いので、その高速化は重要な課題である。本報告では、自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方界近似を用いた自己・相互インピーダンスの新しい表示式を提案する。提案表示式は、互いに離れた位置にある電流セグメント間の相互作用をまとめて計算することができ、モーメント法の高速化への応用が期待できる。提案表示式の有効性を数値計算によって明らかにする。

キーワード モーメント法, ダイアディックグリーン関数, 相互インピーダンス

Far-Field Approximation of a Dyadic Green's Function in a Free Space and Its Application to Method of Moments

Tsukasa SUSUGA[†] Keisuke KONNO[†] and Qiang CHEN[†]

[†] Department Communications Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University

Aramaki Aza Aoba 6-6-05, Aoba-ku, Sendai, 980-8579, Japan

E-mail: [†] {susuga-t, konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract Since the numerical analysis of large-scale antennas using method of moments (MoM) is computationally expensive, reduction of the CPU time is a great challenge. In this report, a novel expression of self/mutual impedance using the far-field approximation of the dyadic green function in a free space is proposed. The proposed expression is expected to be applicable to reduce the CPU time of the MoM because it enables to calculate mutual coupling among the current segments far from each other collectively. The effectiveness of the proposed method is clarified by numerical calculation.

Keywords Method of moments (MoM), Dyadic green function, Mutual impedance

1. 背景

モーメント法[1][2](Method of Moments, MoM)は電磁界数値解析手法の一つであり、アンテナや散乱体表面の電流分布を数値的に求めることに用いられる。モーメント法による電磁界数値解析では、電流分布を含む積分方程式が離散化され、得られた連立方程式を数値的に解くことで電流分布が得られる。

モーメント法で最も計算時間を要する部分は連立方程式を解く部分である。連立方程式を解く手法は、直接法と反復法に分けられる。直接法は、係数行列の逆行列を求めて解を得る手法であり、未知数の数を N とするとその計算時間は N^3 に比例する。その一方で、反復法は近似解を逐次的に更新していくことで真の解に近づけていく方法であり、反復 1 ステップ当たりの計算時間は N^2 に比例する。また、係数行列を保存するための計算機メモリは N^2 に比例する。大規模アンテナなど、未知数 N が多い問題はモーメント法の計算時間は行列方程式を解く時間で、計算機メモリは係数行列の保存に必要な分ではほぼ決定されることから、大規模

問題を解くには高速化およびメモリの低減は不可欠である。

これまでの研究では、直接法に基づく高速モーメント法として、Characteristic Basis Function Method (CBFM)が提案されている[3]。CBFM は、いわゆるマクロ基底関数(Macro Basis Function, MBF)を用いた手法であり、複数のセグメントをカバーする MBF を数値的に求め、それを用いて大規模問題を小規模問題に圧縮する。直接法で解けない大規模な問題も、圧縮すれば直接法で解くことができ、大規模問題の数値解析が高速になる。

一方で、反復法に基づく高速モーメント法として、高速多重極法(Fast Multipole Method, FMM)が挙げられる[4]。FMM は、セグメント間の作用をまとめて近似的に計算する手法であり、遠方のセグメントを 1 つのグループにまとめて、グループ単位で計算を行うことで高速化とメモリ低減を可能とする。FMM は、モーメント法の高速化に有効な手法であるが、定式化が複雑で実装が容易でないという問題がある。

そこで本研究では、自由空間のダイアディックグリーン関数に遠方界近似を導入することで、電流セグメント間の相互インピーダンス作用をグループ単位で計算可能にする手法を提案する。提案法は、特殊関数や平面波展開を含むFMMに比べて定式化が容易である。提案法の有効性を数値的に明らかにする。

1.1. 遠方界近似を用いた自由空間のダイアディックグリーン関数による相互インピーダンスの表示式

今、図1のように自由空間に長さ $2l$ の微小ダイポール素子が2つ波長に比べて十分に離れた位置にあるとする。 θ_t は z' 軸と \mathbf{R} のなす角であり、 ϕ_t は x' と \mathbf{R} の $x'y'$ 面への射影がなす角、 θ_r は z 軸と \mathbf{R} のなす角、 ϕ_r は x と \mathbf{R} の xy 面への射影がなす角である。波源に x' 方向、観測点に x 方向の微小ダイポールがあるとき、波源が観測点に作る電界 \mathbf{E}_1 は

$$\mathbf{E}_1 = -j \frac{k_0 Z_0 e^{jk_0 R}}{4\pi R} I_1 \mathbf{l}_1 \quad (1)$$

ただし、 I_1 は素子1の電流で、 \mathbf{l}_1 は波源のベクトル実行長であり次の式で与えられる。

$$\mathbf{l}_1 = \frac{1}{l_1} \hat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{D}_1 \times \hat{\mathbf{R}}_t \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_t = (\sin\theta_t \cos\phi_t, \sin\theta_t \sin\phi_t, \cos\theta_t) \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_1 = \int_{-l}^l I_1 f'(x) e^{jk_0(\hat{\mathbf{R}}_t \cdot \mathbf{r}')} \hat{\mathbf{x}} dx' \quad (4)$$

なお、 $f'(x)$ は波源の電流分布を表す任意の関数である。ここで $\mathbf{D}_1 = (D_{1x}, 0, 0)$ とおくと、

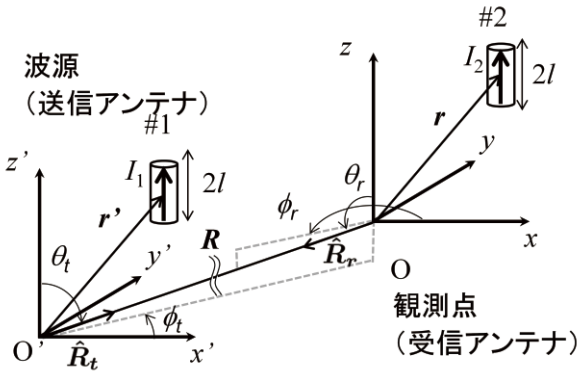


図1 送受信アンテナの配置

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{D}_1 \times \hat{\mathbf{R}}_t \\ & = D_{1x} (\sin^2 \theta_t \sin^2 \phi_t \\ & + \cos^2 \theta_t, -\sin^2 \theta_t \sin\phi_t \cos\theta_t, -\sin\theta_t \cos\theta_t \cos\phi_t) \end{aligned} \quad (5)$$

よって、 \mathbf{E}_1 が観測点にある微小ダイポールに励振する受信開放電圧は次のようになる。

$$V_{21} = -j \frac{k_0 Z_0 e^{jk_0 R}}{4\pi R} I_1 \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 \quad (6)$$

ここで

$$\mathbf{l}_2 = \frac{1}{l_2} \hat{\mathbf{R}}_r \times \mathbf{D}_2 \times \hat{\mathbf{R}}_r \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_r = (\sin\theta_r \cos\phi_r, \sin\theta_r \sin\phi_r, \cos\theta_r) \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_{-l}^l I_2 f(x) e^{-jk_0(\hat{\mathbf{R}}_r \cdot \mathbf{r})} \hat{\mathbf{x}} dx \quad (9)$$

同様に、

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{R}}_r \times \mathbf{D}_2 \times \hat{\mathbf{R}}_r \\ & = D_{2x} (\sin^2 \theta_r \sin^2 \phi_r \\ & + \cos^2 \theta_r, -\sin^2 \theta_r \sin\phi_r \cos\theta_r, -\sin\theta_r \cos\theta_r \cos\phi_r) \end{aligned} \quad (9)$$

以上の式から、波源と観測点間の相互インピーダンスは次のようになる。

$$z_{21}^{xx'} = -\frac{V_{21}}{I_1} \quad (10)$$

$$= -jk_0 Z_0 \int_{-l}^l f(x') \int_{-l}^l f(x) G_{xx'}^{re} dx dx'$$

ここで

$$G_{xx'}^{re} = e^{-jk_0(\hat{\mathbf{R}}_r \cdot \mathbf{r})} \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} F_{xx'}(\hat{\mathbf{R}}_r, \hat{\mathbf{R}}_t) e^{jk_0(\hat{\mathbf{R}}_t \cdot \mathbf{r}')} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & F_{xx'}(\hat{\mathbf{R}}_r, \hat{\mathbf{R}}_t) \\ & = (\sin^2 \theta_t \sin^2 \phi_t \\ & + \cos^2 \theta_t, -\sin^2 \theta_t \sin\phi_t \cos\theta_t, -\sin\theta_t \cos\theta_t \cos\phi_t) \\ & \cdot (\sin^2 \theta_r \sin^2 \phi_r \\ & + \cos^2 \theta_r, -\sin^2 \theta_r \sin\phi_r \cos\theta_r, -\sin\theta_r \cos\theta_r \cos\phi_r) \end{aligned} \quad (12)$$

$G_{xx'}^{re}$ は遠方におけるダイアディックグリーン関数の xx' 成分の近似表現である。以上の手続きを各成分に適用すると、相互インピーダンスは(13)式のように表せる。

$$z_{mn} = j\omega\mu_0 \int_{-l}^l \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \int_{-l}^l \bar{\mathbf{G}}^{re} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{G}}^{re} = e^{-jk_0(\hat{\mathbf{R}}_r \cdot \mathbf{r})} \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \begin{bmatrix} F_{xx'} & F_{xy'} & F_{xz'} \\ F_{yx'} & F_{yy'} & F_{yz'} \\ F_{zx'} & F_{zy'} & F_{zz'} \end{bmatrix} e^{jk_0(\hat{\mathbf{R}}_t \cdot \mathbf{r}')} \quad (14)$$

$\bar{\mathbf{G}}^{re}$ は自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方における近似表現である。(14)式は波源、伝搬経路、観測点の3つの要素に分解が可能であり、それぞれを独立して扱えることを示唆している。

2. 提案手法の収束性

2.1. 平行ダイポールセグメント間の相互インピーダンスの収束性

本報告で提案する相互インピーダンス表示式の数値計算精度を明らかにする。図2のようにダイポールセグメントを配置し、相互インピーダンスを求めた。

周波数 f は 30 GHz, ダイポール長 l は 0.1λ , ダイポールの半径 a は 0.001λ である. ダイポールセグメント間の距離 d を 0.02λ ずつ増やしながらダイポールセグメント間の距離に対して相互インピーダンスを求めた結果を図 3 に示す. ここで, 厳密な自由空間のダイアディックグリーン関数を用いて求めた相互インピーダンスを Z_{MoM} とし, (14)式に示す遠方界近似を用いた自由空間のダイアディックグリーン関数を用いて求めた相互インピーダンスを Z_{far} としている. また, この時の誤差を図 4 に示す. 誤差は(23)式で与えられる.

$$Error = \frac{|Z_{MoM} - Z_{far}|}{|Z_{MoM}|} \times 100 \quad (15)$$

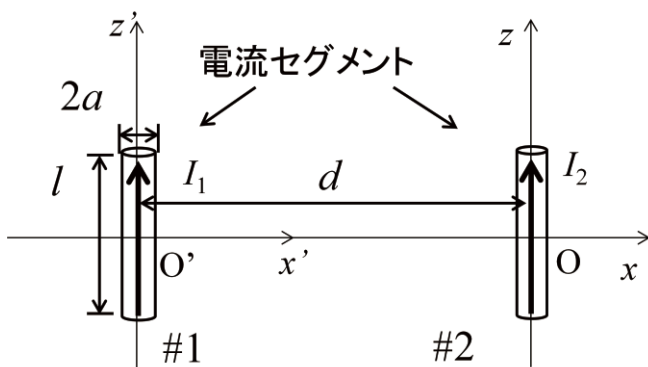


図 2 平行ダイポールセグメント.

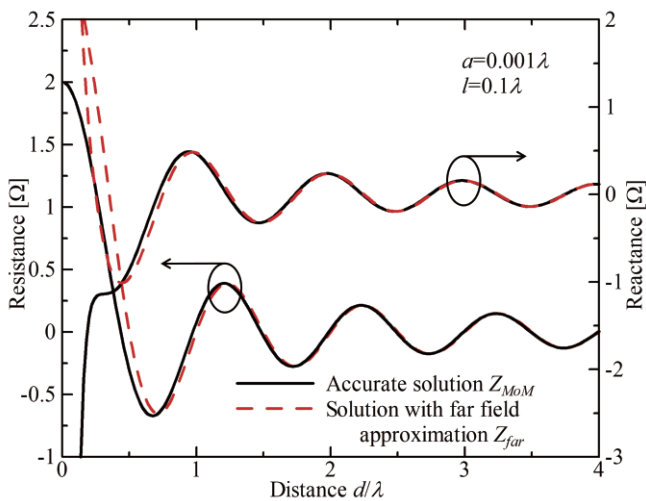


図 3 各手法による相互インピーダンスの数値計算結果.

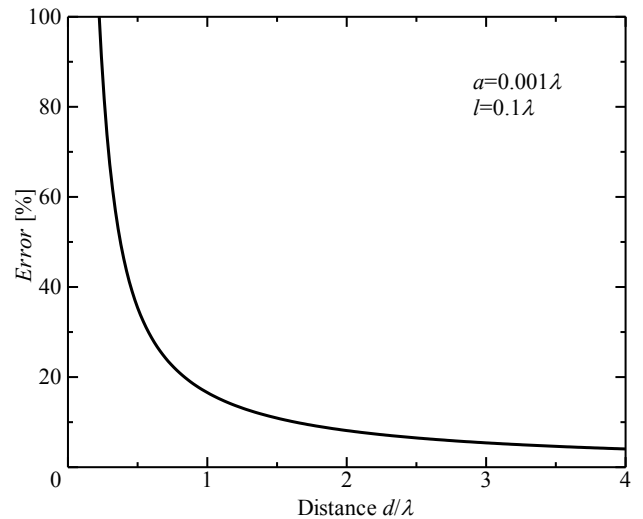


図 4 相互インピーダンスの誤差.

図 4 から, セグメント間距離 d が半波長の時の誤差は約 35 % であり, d がおよそ 2 波長以上で誤差は 10 % 以下となることが分かる. このようにダイポールセグメント間の距離 d が大きくなるほど誤差が小さくなることが判明した. その原因として, セグメント間の距離が波長に比べ十分に離れているときは, 近似式で落としている近傍界の影響が弱まり, 近似式に含まれる遠方界の影響が支配的になることが原因であると考えられる.

2.2. 半波長ダイポールアレーの動作インピーダンスの収束性

(13)式をモーメント法に応用し, その精度を明らかにする. 半波長ダイポールアレーの数値解析を行い, 一定の閾値 d_m より小さい距離にあるセグメント間の相互インピーダンスは厳密に, 閾値 d_m 以上の距離にあるセグメント間の相互インピーダンスは(13)式を用いて計算する. 数値解析によって得られた動作インピーダンスの精度と閾値 d_m との関係を明らかにする.

図 5 のように半波長ダイポールを等間隔で配置したアレーアンテナの動作インピーダンスを求める. 近似式を用いてセグメント間の相互インピーダンスを求めるか否かを決定する距離の閾値 d_m は 0.5, 1, 2, 3 波長とした, 周波数は 30 GHz としている. 図 6(a)は動作抵抗を示しており, 図 6(b)は動作リアクタンスを示している. 実線は厳密な自由空間のダイアディックグリーン関数を用いて相互インピーダンスを求めた時の動作インピーダンスを表している. 表 1 は(15)式を用いて求めた動作インピーダンスの誤差を表している. 図 6 及び表 1 から, 近似式の適用距離を大きくすることで, 厳密な動作インピーダンスに近づくことが分かる. 閾値が小さいときはセグメント間隔が波長に比べ小さく,

近傍界による影響が無視できない程大きかったために誤差が生じたと考えられる。

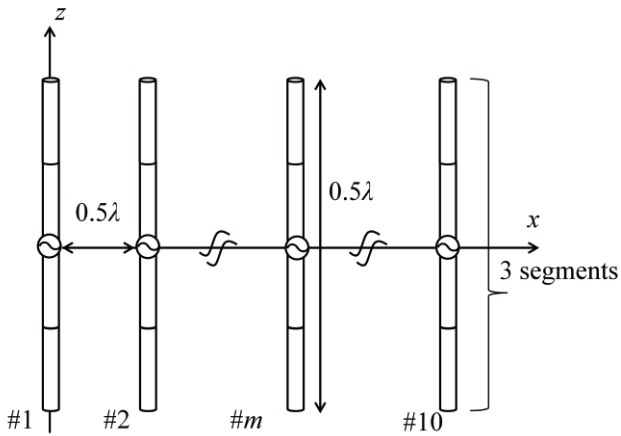
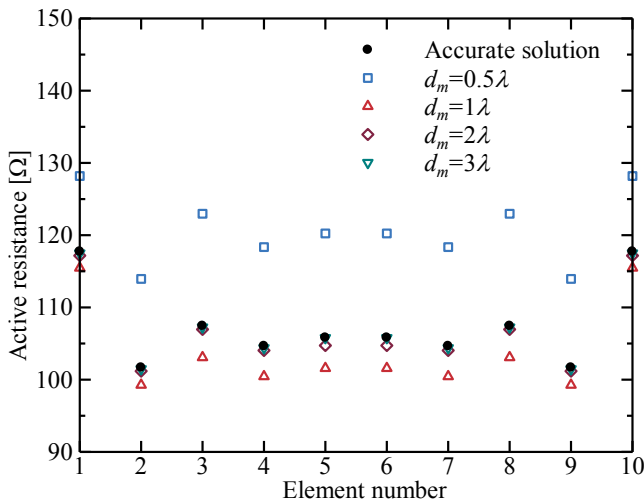
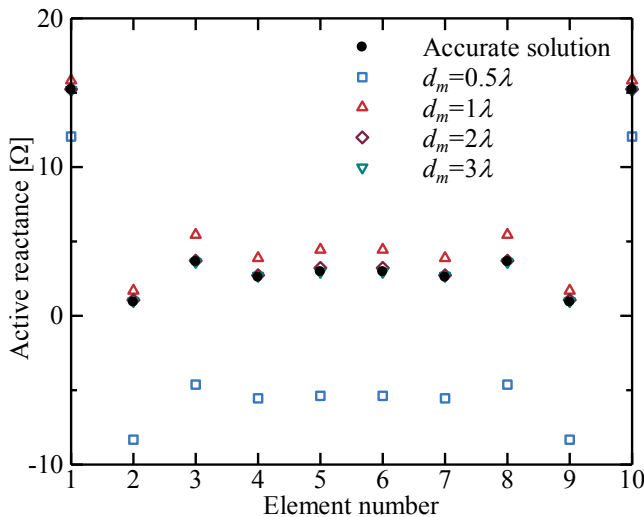


図 5 半波長ダイポールアレイ。



(a) 各閾値における動作抵抗。



(b) 各閾値における動作リアクタンス。

図 6 近似式を適用するセグメント間距離の閾値に対する動作インピーダンスの数値計算結果。

表 1 各閾値に対する動作インピーダンスの誤差。

閾値	誤差 [%]
0.5λ	16
1λ	4
2λ	1
3λ	0.3

3. まとめと今後の課題

本報告では、自由空間のダイアディックグリーン関数の遠方界近似を適用した相互インピーダンスの表示式を提案した。提案した表示式を用いて電流セグメント間の相互インピーダンスを求め、その精度を明らかにした。その結果、平行ダイポールセグメント間の相互インピーダンスを誤差 10 %以下の精度で得るにはセグメント間距離が 2 波長以上必要であることが明らかになった。また、提案した表示式からセグメント間の相互インピーダンスを計算し、半波長ダイポールアレイの数値解析を行った。2 波長以上離れているセグメント間の相互インピーダンスの数値計算に近似式を用いることで、動作インピーダンスの誤差を約 1%以下に抑えられることを明らかにした。

今後は CG 法及び、セグメントのグループ化を適用して計算の高速化及びメモリの低減を図る。

謝辞

本研究に関してアドバイスを頂いた東北大学サイバーサイエンスセンターに謝意を表す。本研究成果の一部は、東北大学電気通信研究所 共同プロジェクト研究によるものである。

文献

- [1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.
- [2] J. H. Richmond and N. H. Greay, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 23, No.5, pp. 412-414, May. 1975
- [3] V.V.S. Prakash and R. Mittra, "Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations," Microw. Opt. Technol. Lett., vol.36, no.2, pp.95-100, Janu. 2003.
- [4] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription," IEEE Antennas Propag. Mag., vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.