一般社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
A･P2019-97(2019-10)

多層媒質上にある大規模周期的アレーアンテナの高速な数値解析法の研究

今野　佳祐† 　陳　　強†

† 東北大学大学院 工学研究科 通信工学専攻　〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
E-mail: †{konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし　本報告では，多層媒質上にある大規模なアレーアンテナの高速な電磁界数値解析法について述べる．本手法は，多層媒質空間のグリーン関数を用いており，誘電体や磁性体の層を無限大の平板とみなしている．誘電体や磁性体がアンテナ特性に及ぼす寄与はグリーン関数そのものに含まれているので，それらをメッシュにする必要がない．グリーン関数に含まれるゾンマーフェルド積分の数値計算を高速化するために，ベッセル関数のテイラー展開に基づく数値補間法を導入する．また，大規模周期的アレーアンテナの数値解析を高速化するために，周期構造を利用した Characteristic Basis Function Method(CBFM) を導入する．これらの手法により，多層媒質上にある大規模なアレーアンテナの数値解析を行い，その有効性を明らかにする．

キーワード　モーメント法，多層媒質空間のグリーン関数，CBFM，アレーアンテナ

A Study on a Fast Numerical Analysis Method for Large-Scale Periodic Array Antennas on Multi-Layered Media

Keisuke KONNO† and Qiang CHEN†

† Communications Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University
6-6-05 Aramaki Aza Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi, 980-8579, Japan
E-mail: †{konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract　In this report, a fast numerical analysis method for large-scale periodic array antennas on multi-layered media is discussed. The method uses a layered media Green's function (LMGF) and layers of dielectric/magnetic materials are modeled as infinite plates. The LMGF includes effects of dielectric/magnetic materials on an antenna performance and the dielectric/magnetic materials are mesh-free. Cumbersome numerical quadrature for the Sommerfeld integral is efficiently performed using a numerical interpolation method based on the Taylor expansion of Bessel functions. A characteristic basis function method (CBFM) developed for numerical analysis of large-scale periodic array antennas is used. Numerical analysis of large-scale array antennas on multi-layered media is performed using these methods and performance of these methods is demonstrated.

Key words　Method of moments (MoM), Layered media Green's function (LMGF), Characteristic basis function method (CBFM), Array antennas

1. ま え が き

アレーアンテナは，無線通信やレーダー等の用途に幅広く用いられている，最もポピュラーなアンテナの 1 つである [1]- [4]．中でも，マイクロストリップアレーアンテナは，市販の誘電体基板で試作が容易に可能であること，および薄型であることなどから，非常によく用いられている．このようなマイクロストリップアレーアンテナは，その厚みが波長に比べて小さい一方，その面積は波長に比べて大きくなりがちであることから，波長に対してスケールの異なる構造を同時に扱うマルチスケール問題の一種とみなすことができる．このようなマルチスケール問題の電磁界数値解析では，波長に対してスケールの異なる構造をいかにモデリングするが重要である．最も直観的なモデリングは，誘電体とアレーアンテナの両方を空間に配置して，境界条件を満たすような電磁界を求める手法である．このような手法として，FDTD 法や有限要素法，体積積分方程式を用いた

モーメント法などが挙げられる．これらの手法は，媒質部分の大きさや電気定数の空間分布を自由に与えられるので汎用性は高いものの，媒質部分をメッシュや電流セグメントにする必要があるため，大規模なアレーアンテナの数値解析は容易ではない．その一方で，基板などの誘電体を無限に広い層状の媒質とみなし，媒質境界における反射・透過係数から求めた伝達関数，すなわち多層媒質のグリーン関数を用いたモーメント法が知られている [5]- [8]．この手法は，層状媒質が存在する空間の伝達関数，すなわちグリーン関数を事前に解析的に求めておき，それを用いてアンテナ間の自己・相互インピーダンスを計算する手法である．媒質の寄与はグリーン関数そのものに含まれているので，媒質部分がメッシュフリーになるという大きな利点がある．このような多層媒質のグリーン関数には，ゾンマーフェルド積分と呼ばれる無限区間のスペクトル積分が含まれており，行列方程式の要素の数値計算に非常に長い時間が必要になるという問題があるため，これを解決する必要がある．

マイクロストリップアレーアンテナの電磁界数値解析では，アレーアンテナの高速な数値解析法も重要である．そのような手法として，大域的な基底関数 (Macro basis function, MBF) を用いる高速モーメント法が挙げられる．MBF は，波長に比べて広い領域をカバーする基底関数を数値的に求め，それらの基底関数を用いて元の問題を圧縮し，小規模化してから解くという手法であり，代表的なものに characteristic basis function method (CBFM) や subentire domain (SED) basis function method などが挙げられる [9]- [13]．このような MBF を用いたモーメント法では，広い範囲をカバーする高品質の MBF をいかに少ない計算コストで求めるか，という点が重要である．従来の手法は，いずれもアレー素子単体かサブアレーをカバーする MBF を用いたものであり，アレーのほぼ全体をカバーするような MBF を用いる手法は見当たらない．

本報告では，マイクロストリップアレーアンテナの高速な電磁界数値解析法を提案する．提案法は，多層媒質のためのグリーン関数を用いたモーメント法である．ゾンマーフェルド積分の数値計算回数を減らすため，ベッセル関数のテイラー展開を用いた数値補間法を導入する [14], [15]．また，大規模アレーアンテナの数値解析を高速化するため，有限の大規模周期構造のための CBFM である Macro block-CBFM(MB-CBFM) を導入する [16], [17]．提案手法によって，大規模なマイクロストリップアレーアンテナの数値解析が高速になることを数値シミュレーションで明らかにする．

2. 多層媒質のグリーン関数を用いたモーメント法

2.1 多層媒質のグリーン関数

図 1 に示すような多層媒質空間の第 m 層にある波源 $\mathbf{r}'$ と第 n 層にある観測点 $\mathbf{r}$ の間の伝達関数，すなわち多層媒質空間のグリーン関数は以下の式で表される．

$$\overline{\overline{G}}_{LM}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \overline{\overline{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \overline{\overline{G}}^{TE}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{1}{k_{nm}^2}\overline{\overline{G}}^{TM}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad (1)$$

$$\overline{\overline{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\nabla\nabla}{k_m^2})\frac{e^{-jk_m|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = (\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\nabla\nabla}{k_m^2})g \quad (2)$$

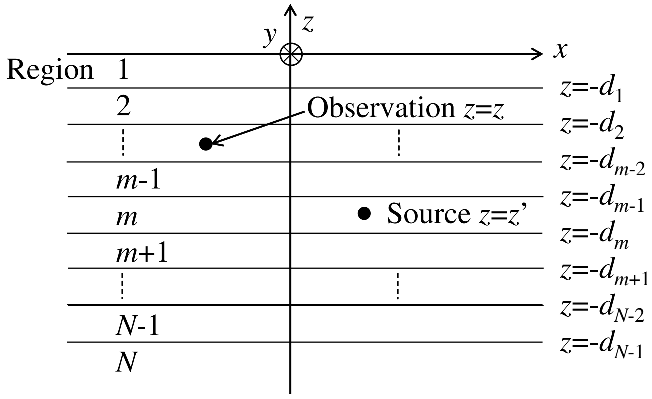

Figure 1 多層媒質空間.

$$\overline{\overline{G}}^{TE}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (\nabla\times\hat{\mathbf{z}})(\nabla'\times\hat{\mathbf{z}})g^{TE}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad (3)$$

$$\overline{\overline{G}}^{TM}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (\nabla\times\nabla\times\hat{\mathbf{z}})(\nabla'\times\nabla'\times\hat{\mathbf{z}})g^{TM}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad (4)$$

$$g^{TE}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(k_\rho\rho)}{k_{mz}k_\rho}F^{TE}(k_\rho,z,z')dk_\rho \quad (5)$$

$$g^{TM}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(k_\rho\rho)}{k_{mz}k_\rho}F^{TM}(k_\rho,z,z')dk_\rho \quad (6)$$

ここで，$\overline{\overline{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ は波源から観測点に到達する直接波に相当し，波源と観測点が同じ層にあるときのみ必要な項である．$\overline{\overline{G}}^{TE}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ と $\overline{\overline{G}}^{TM}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ は，波源から観測点に到達する反射波と透過波に相当し，それぞれ TE 波と TM 波の寄与を表す項である．なお，$k_{nm}^2 = \omega^2\epsilon_n\mu_m$，$k_{mz} = \sqrt{k_m^2 - k_\rho^2}$，$J_0(k_\rho\rho)$ は 0 次第一種ベッセル関数，$\rho = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$，$k_\rho$ はスペクトル変数である．F^{TE} と F^{TM} は，媒質の境界での TE 波と TM 波の反射と透過の寄与を一般化反射係数と一般化透過係数で記述した伝播項であり，以下の式で表される．

$$F(k_\rho,z,z')$$
$$\begin{cases} = (e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}e^{jk_{m,z}(2d_{m-1}+z)})\times \\ (e^{jk_{m,z}z'} + \tilde{R}_{m,m+1}e^{-jk_{m,z}(2d_m+z')})\tilde{M}_m \\ \quad \text{where} \quad z' < z < -d_{m-1} \\ = (e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}e^{-jk_{m,z}(2d_m+z)})\times \\ (e^{-jk_{m,z}z'} + \tilde{R}_{m,m-1}e^{jk_{m,z}(2d_{m-1}+z')})\tilde{M}_m \\ \quad \text{where} \quad -d_m < z < z' \\ = (e^{-jk_{n,z}z} + \tilde{R}_{n,n-1}e^{jk_{n,z}(2d_{n-1}+z)})e^{-jk_{n,z}d_n}\tilde{T}_{m,n}\times \\ e^{jk_{m,z}d_{m-1}}(e^{jk_{m,z}z'} + \tilde{R}_{m,m+1}e^{-jk_{m,z}(2d_m+z')})\tilde{M}_m \\ \quad\quad \text{where} \quad z > -d_{m-1} \\ = (e^{jk_{n,z}z} + \tilde{R}_{n,n+1}e^{-jk_{n,z}(2d_n+z)})e^{jk_{n,z}d_{n-1}}\tilde{T}_{m,n}\times \\ e^{-jk_{m,z}d_m}(e^{-jk_{m,z}z'} + \tilde{R}_{m,m-1}e^{jk_{m,z}(2d_{m-1}+z')})\tilde{M}_m \\ \quad\quad \text{where} \quad z < -d_m \end{cases}$$

(7)

$$\tilde{R}_{m,m-1} = \frac{R_{m,m-1}^{TE,TM} + \tilde{R}_{m-1,m-2}^{TE,TM}e^{-2jk_{m-1,z}(d_{m-1}-d_{m-2})}}{1 + \tilde{R}_{m-1,m-2}^{TE,TM}R_{m,m-1}^{TE,TM}e^{-2jk_{m-1,z}(d_{m-1}-d_{m-2})}}$$

(8)

$$\tilde{R}_{m,m+1} = \frac{R^{TE,TM}_{m,m+1} + \tilde{R}^{TE,TM}_{m+1,m+2} e^{-2jk_{m+1,z}(d_{m+1}-d_m)}}{1 + R^{TE,TM}_{m,m+1} \tilde{R}^{TE,TM}_{m+1,m+2} e^{-2jk_{m+1,z}(d_{m+1}-d_m)}} \tag{9}$$

$$\tilde{M}_m = \frac{1}{1 - \tilde{R}_{m,m+1}\tilde{R}_{m,m-1} e^{-2jk_{m,z}(d_m - d_{m-1})}} \tag{10}$$

$$\tilde{T}_{m,n} \begin{cases} = \prod_{i=m}^{n-1} e^{-jk_{i,z}(d_i - d_{i-1})} \times \\ \dfrac{T^{TE,TM}_{i,i+1}}{1 + R^{TE,TM}_{i,i+1} \tilde{R}^{TE,TM}_{i+1,i+2} e^{-2jk_{i+1,z}(d_{i+1}-d_i)}} \\ \text{where} \quad m < n \\ = \prod_{i=n}^{m-1} e^{-jk_{i,z}(d_i - d_{i-1})} \times \\ \dfrac{T^{TE,TM}_{i+1,i}}{1 + R^{TE,TM}_{i+1,i} \tilde{R}^{TE,TM}_{i,i-1} e^{-2jk_{i,z}(d_i-d_{i-1})}} \\ \text{where} \quad m > n \end{cases} \tag{11}$$

なお，TE 波は電界，TM 波は磁界に対する反射係数と透過係数をそれぞれ用いていることに注意されたい．ここで，伝播項 F^{TE} と F^{TM} は，以下のような可逆性を持つことが分かっている．

$$\frac{\mu_m}{k_{m,z}} F(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_n}{k_{n,z}} F(k_\rho, z', z) \tag{12}$$

$$\frac{\varepsilon_m}{k_{m,z}} F(k_\rho, z, z') = \frac{\varepsilon_n}{k_{n,z}} F(k_\rho, z', z) \tag{13}$$

このような多層媒質のグリーン関数は，誘電体や磁性体の層を無限大の広さの平板とみなしており，それらの媒質境界からの反射波と透過波の寄与が関数そのものに含まれている．したがって，アンテナに比べて大型の誘電体基板や磁性体の薄膜などをメッシュフリーでモデリングすることができ，解くべき行列方程式が小さくなるという利点がある．その一方で，グリーン関数に含まれる半無限のスペクトル積分，いわゆるゾンマーフェルド積分の数値解析には時間がかかるため，その計算時間を削減する必要がある．

2.2 多層媒質のグリーン関数を用いたアンテナ間の自己・相互インピーダンスの数値計算の高速化

いま，マイクロストリップアンテナのように，媒質境界に平行な面状アンテナを考える．多層媒質のグリーン関数と電界積分方程式から，アンテナ間の自己・相互インピーダンスの表示式は以下のように表される．

$$Z = j\omega\mu_m \int_{S'}\int_{S} \Big\{ \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) - \frac{1}{k_m^2} [\nabla_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})][\nabla'_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}')] \Big\} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \tag{14}$$

$$Z^{TE} = j\omega\mu_m \int_{S'}\int_{S} \Big\{ \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}}_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) k_\rho^2 - [\nabla_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})][\nabla'_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}')] \Big\} g^{TE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \tag{15}$$

$$Z^{TM} = j\omega\mu_m \int_{S'}\int_{S} \big\{ [\nabla_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})][\nabla'_s \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}')] \big\} \times \frac{1}{k_{nm}^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} g^{TM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \tag{16}$$

ここで，Z は (1) 式の $\overline{\overline{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$，$Z^{TE}$ は $\overline{\overline{G}}^{TE}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$，$Z^{TM}$ は $\overline{\overline{G}}^{TM}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ の寄与に相当する成分である．また，$\mathbf{f}(\mathbf{r}')$ は領域 S' 上で定義される基底関数であり，$\mathbf{f}(\mathbf{r})$ は領域 S 上で定義される試行関数である．∇'_s と ∇_s はそれぞれ波源と観測点にある面状ベクトルの発散である．多層媒質空間にあるアンテナ間の自己・相互インピーダンスの表示式は (14) 式 ∼(16) 式の和になる．

(15) 式と (16) 式は，(5) 式と (6) 式で表される半無限のスペクトル積分，いわゆるゾンマーフェルド積分をその被積分関数に含む．ゾンマーフェルド積分は，積分区間が半無限であること，被積分関数が振動すること，被積分関数に極が含まれること，といった数値計算上の大きな問題を抱えており，その数値積分は容易ではない．その一方で，(5) 式と (6) 式は空間座標 ρ をベッセル関数の中に含むので，(15) 式と (16) 式において波源と観測点に関する数値積分を行うたびにゾンマーフェルド積分を何度も数値計算する必要があり，計算時間が長くなってしまう．

ここで，ゾンマーフェルド積分の数値計算回数を減らすために，ベッセル関数を以下のようにテイラー展開する．

$$J_0(k_\rho \rho) = J_0(k_\rho \rho_i) + \frac{\partial J_0(k_\rho \rho_i)}{\partial \rho}(\rho - \rho_i) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_0(k_\rho \rho_i)}{\partial \rho^2}(\rho - \rho_i)^2 + \cdots \tag{17}$$

(17) 式に含まれるベッセル関数の高次の微分は，再帰的な表現からただちに求めることができ，その計算時間はほぼ 0 である．したがって，いくつかの ρ に対して (5) 式と (6) 式のスペクトル積分およびその ρ に関する微分を求めておけば，任意の ρ におけるゾンマーフェルド積分の値は (17) 式から容易に数値補間できる．このようなゾンマーフェルド積分の数値補間法を用いれば，多層媒質空間にあるアレーアンテナの数値解析が非常に高速になる [14], [15]．

2.3 有限周期構造のための MB-CBFM

一般的に，モーメント法によって得られる行列方程式は，以下のように記述できる．

$$\mathbf{ZI} = \mathbf{V}. \tag{18}$$

ここで，$\mathbf{Z}$ は $N \times N$ のインピーダンス行列, $\mathbf{I}$ は $N \times 1$ の未知の電流ベクトル, そして $\mathbf{V}$ は $N \times 1$ の既知の電圧ベクトル, N は未知数の数である．同一素子から成る周期的アレーを考えると，(18) 式は，以下のようなブロック行列方程式として記述できる．

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{Z}^b_{11} & & \cdots & & \mathbf{Z}^b_{1M} \\
 & \ddots & & & \\
\vdots & & \mathbf{Z}^b_{ii} & & \vdots \\
 & \mathbf{Z}^b_{ij} & & \ddots & \\
\mathbf{Z}^b_{M1} & & \cdots & & \mathbf{Z}^b_{MM}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{I}^b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}^b_i \\ \vdots \\ \mathbf{I}^b_M
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{V}^b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}^b_i \\ \vdots \\ \mathbf{V}^b_M
\end{bmatrix}. \tag{19}
$$

ここで，$\mathbf{Z}^b_{ij}$ は，第 i 素子と第 j 素子の間の $K \times K$ ブロックインピーダンス行列，$\mathbf{I}^b_i$ は第 i 素子の $K \times 1$ の未知のブロック電流ベクトル，$\mathbf{V}^b_i$ は第 i 素子の $K \times 1$ の既知のブロック電圧ベクトルである．なお，M は素子数，K は 1 素子当たりの未知数であり，$N = MK$ が成り立つ．ここで定義されたブロックは，従来の CBFM のブロックと等しい．MBF の理論に従うと，未知のブロック電流ベクトルは MBF の一種である CBF によって以下のように展開できる．

$$
\mathbf{I}^b_i = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{(i,k)} \mathbf{J}^b_{(i,k)} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, M. \tag{20}
$$

ここで，$\mathbf{J}^b_{(i,k)}$ は第 i 素子の k 番目の CBF であり，$\alpha_{(i,k)}$ はその未知の重み係数である．$\mathbf{J}^b_{(i,k)}$ は以下の拡張ブロック行列方程式を解くことで求められる．

$$
\mathbf{J}^e_i = (\mathbf{Z}^e_{ii})^{-1} \mathbf{V}^e_i \quad \text{for} \quad i = 1, 2, ..., M. \tag{21}
$$

ここで，$\mathbf{J}^e_i$ は第 i 拡張ブロックの $(2L+1)^2K \times 1$ 電流ベクトル，$\mathbf{Z}^e_{ii}$ は第 i 拡張ブロックの $(2L+1)^2K \times (2L+1)^2K$ 自己インピーダンス行列，$\mathbf{V}^e_i$ は第 i 拡張ブロックの $(2L+1)^2K \times 1$ 電圧ベクトルである．拡張ブロック行列方程式は，周囲素子との相互結合の影響をブロック電流ベクトルに反映させるために導入するものである．L は端部領域の幅であり，後述するようにマクロブロックの端部領域でもある．例えば，$L = 1$ のとき，ある拡張ブロックの中心素子は 8 つの素子に囲まれ，$L = 2$ のとき，ある拡張ブロックの中心素子は 24 個の素子に囲まれることになる．$L = 1$ のときのブロックと拡張ブロックの一例を，図 2 に示す．この方法で周囲素子との相互結合の影響がブロック電流へ反映されることは過去の研究でよく知られている [10], [9]．得られた $\mathbf{J}^e_i$ のうち，第 i ブロックに対応する部分のみがブロック電流 $\mathbf{J}^b_i$ として残され，残りの部分は棄却される．最終的に，$\mathbf{J}^b_i$ に固有ベクトル分解を行うと，CBF である $\mathbf{J}^b_{(i,k)}$ は以下のように得られる．

$$
\mathbf{J}^b_{(i,k)} = (\mathbf{J}^b_i \cdot \mathbf{e}_{(i,k)}) \mathbf{e}_{(i,k)} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, ..., K. \tag{22}
$$

ここで $\mathbf{e}_{(i,k)}$ は，第 i ブロック自己インピーダンス行列 $\mathbf{Z}^b_{ii}$ の k 番目の固有ベクトルである．K 個の未知数に対して K 個の固有ベクトルが基底関数として得られていることから，従来の CBFM で求めていたいわゆる Secondary basis function は MB-CBFM では不要である [9]．

未知の重み係数 $\alpha_{(i,k)}$ を効率的に求めるために，図 3 に示すようなマクロブロックが定義される．アレーアンテナの励振が一様振幅の周期的位相差付き給電であると仮定すると，同一のマクロブロック内にあるブロックの電流分布は，周期的位相差

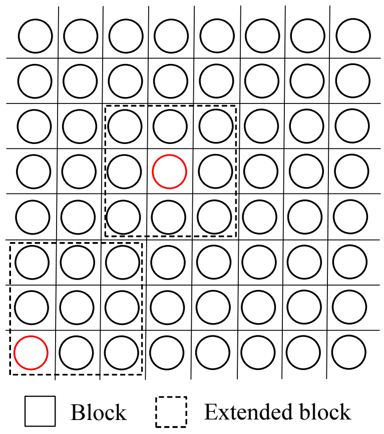

Figure 2　8×8 ループアレーにおいて CBF を計算する際のブロック分けの例 ($L = 1$).

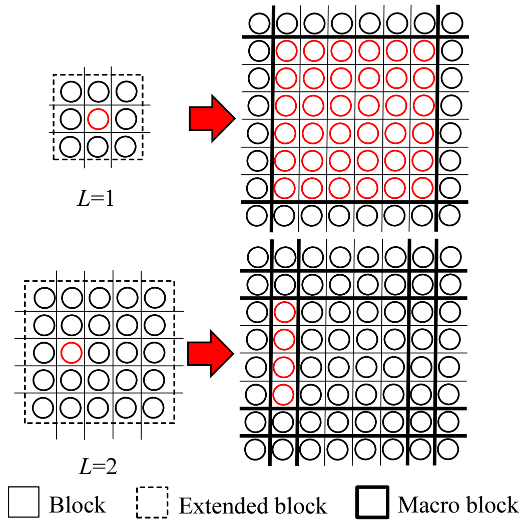

Figure 3　マクロブロック内における CBF を計算するための 8×8 ループアレーアンテナのブロック分け ($L = 1$ および $L = 2$). 赤字の素子はブロックとマクロブロックとの対応関係を示す.

を除けばほぼ一様である．その一方で，各ブロックは同じ CBF の組を有しており，ブロックの電流分布はそれらに重み係数を乗じたものの和として表される．以上のことから，同一のマクロブロック内にあるブロックにおける同じ CBF の重み係数は，周期的位相差を除いて全て等しくなると考えられる．このことを利用すると，求めるべき重み係数の数を大幅に削減することができる．

まず，同一のマクロブロック内にあるブロックにおける同じ CBF を互い連結し，マクロブロックの CBF を得る．例えば，第 p マクロブロックの CBF は以下の式で表される．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{J}^{mb}_{(p,k)} = (\mathbf{J}^b_{(1,k)}, \mathbf{J}^b_{(2,k)}, ..., \mathbf{J}^b_{(M'(p),k)}) \\
&\text{for} \;\; k = 1, 2, \ldots, K, \;\; \mathbf{J}^b_{(1,k)} = \cdots = \mathbf{J}^b_{(M'(p),k)}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

ここで，$\mathbf{J}^{mb}_{(p,k)}$ は第 p マクロブロックの第 k 番目の CBF であり，$M'(p)$ は p 番目のマクロブロックに含まれるブロック数である．(23) 式を用いると，(20) 式は以下のように変換される．

Table 1　MB-CBFM の計算時間のオーダー.

Calculation of impedance matrix	$O(N)$
Calculation of CBFs in blocks	$O(P^3N^3/M^3) \approx O(P^3K^3)$ where M is $O(N)$
Calculation of $\mathbf{u}$ vectors	$O(PK^2N)$
Calculation of reduced matrix	$O(PK^2N)$
Inversion of reduced matrix	$O(P^3N^3/M^3) \approx O(P^3K^3)$ where M is $O(N)$

$$\mathbf{I}_p^b = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{(p,k)} \mathbf{J}_{(p,k)}^{mb} \quad \text{for } p = 1, 2, \ldots, P. \tag{24}$$

ここで，P はマクロブロックの総数であり，$P = (2L+1)^2$ である．アレーの端部と中央部でマクロブロックの形は異なるが，いずれのマクロブロックにおいても CBF は同じ方法で得られる．マクロブロックの CBF を求めた後，行列方程式は $\mathbf{u}$ ベクトルを用いて以下のように表される．

$$\sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{K} \alpha_{(p,k)} \mathbf{u}_{(p,k)} = \mathbf{V}$$
$$\left(\mathbf{u}_{(p,k)} = \left[\left[\mathbf{Z}_{1p}^{mb} \mathbf{J}_{(p,k)}^{mb} \right] \left[\mathbf{Z}_{2p}^{mb} \mathbf{J}_{(p,k)}^{mb} \right] \cdots \left[\mathbf{Z}_{Pp}^{mb} \mathbf{J}_{(p,k)}^{mb} \right] \right]^T \right). \tag{25}$$

(25) 式の両辺に $\mathbf{u}^*_{(p',k')}(p' = 1, 2, ..., P, k' = 1, 2, ..., K)$ を乗じて離散化すると，$PK \times PK$ に圧縮された行列方程式が得られる．最終的に，CBF の未知の重み係数は，圧縮されたこの行列方程式を解いて得られる．

(20) 式に示されるように，従来の CBFM が用いられたときの未知数の総数は $N = MK$ である．もちろん，文献 [18] に示されるような最適なブロック分けや特異値分解 (Singular value decomposition, SVD) を用いれば，従来の CBFM における未知数の数は N よりも少なくできる．しかしながら，CBF を計算するための時間と，行列方程式を圧縮するための時間はトレードオフの関係にあるので，従来の CBFM ではその計算時間を大幅に削減することは難しい．その一方で，MB-CBFM は，固有ベクトル分解されたブロック電流を CBF として用いているので，従来の CBFM で必要だった primary/secondary basis function を反復的に求めることなく，十分な数の CBF が得られる [9]．加えて，マクロブロックの CBF がほぼ 0 の計算コストで効率的に得られるので，MB-CBFM では未知数の総数は N から $PK = (2L+1)^2K$ まで削減できる．圧縮した行列方程式のサイズはアレー素子の数と無関係 ($= PK \times PK$) になり，それは元の行列方程式のサイズ ($N \times N$) よりもはるかに小さい．したがって，例え元の問題のアレー素子数が非常に多かったとしても，圧縮された行列方程式はガウス消去法のような直接法で常に容易に解くことができる．その計算時間は $O(P^3K^3)$ であるが，大規模アレーアンテナにおいて $K \ll N$ が一般的に成り立つので，それは無視できるほど小さい．したがって，MB-CBFM のトータルの計算コストは非常に小さくできると期待される．

MB-CBFM の計算時間のオーダーを表 2 に示す．MB-CBFM は，有限の大規模周期的アレーアンテナの数値解析法であるので，アレー素子数 M は未知数 N に比例する，すなわち $M = O(N)$ であると仮定している．また，アレーの周期性を活用することを前提に計算時間のオーダーを導出している．このような前提の下では、MB-CBFM の計算時間のオーダーは $O(N)$，すなわち周期的アレーアンテナのインピーダンス行列の計算時間と等しくなる．表 2 から，方形アレーの計算時間のオーダーは $PK^2N = (2L+1)^2K^2N$ となることが分かり，アレーの端部領域の大きさが MB-CBFM の計算時間に大きな影響を与えることが分かる．MB-CBFM の計算機メモリのオーダーも同様に $O(N)$ となることが示されるが，ここでは省略する．

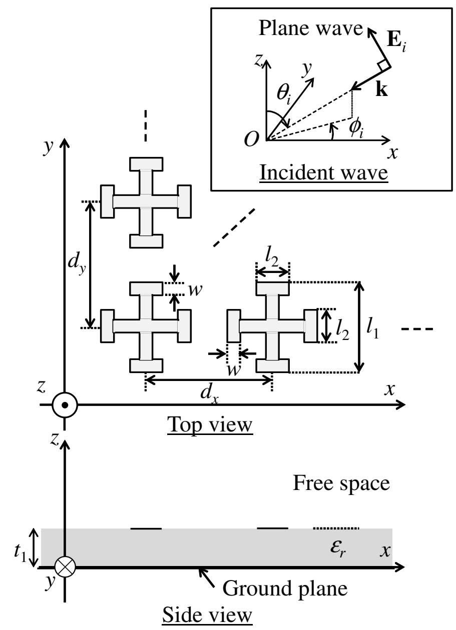

Figure 4　エルサレムクロスアレー.

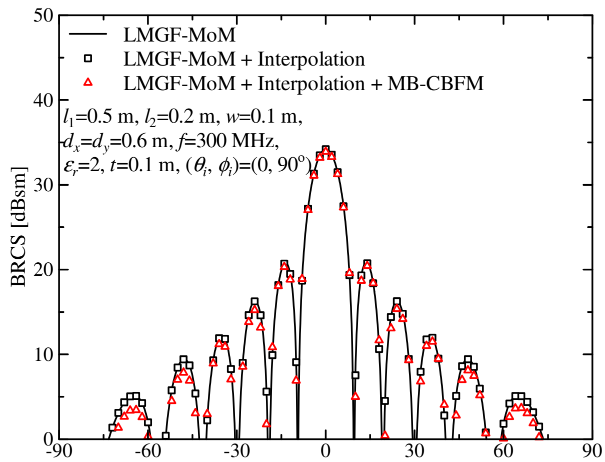

Figure 5　BRCS パターン.

3.　数値シミュレーション

多層媒質のグリーン関数を用いたモーメント法の有効性を明らかにするために，図 4 に示すエルサレムクロスアレーの平面波散乱問題の数値解析を行った．基底関数と試行関数には

Table 2 計算時間.

CPU time	LMGF-MoM	LMGF-MoM+ Interpolation	LMGF-MoM+ Interpolation+ MB-CBFM
Matrix filling	242,855	101	100
Matrix inversion	78,724	78,602	76
Total	321,579	78,703	176

RWG(Rao-Wilton-Glisson) 関数を用い，自己インピーダンスの数値計算における特異性の寄与は座標変換で除去した．1 素子を 120 個の電流セグメントに分割した．

10 × 10 素子アレー (未知数 12,000) の Bistatic radar cross section(BRCS) パターンの数値解析結果を図 5 に示す．厳密なモーメント法の数値解析結果と，自己・相互インピーダンスの数値計算に数値補間法を用いた結果はよく一致している．また，厳密なモーメント法の数値解析結果と MB-CBFM の数値解析結果もよく一致していることが分かる．表 2 に，数値計算に要した時間を示す．厳密なモーメント法 (LMGF-MoM) は，ゾンマーフェルド積分の数値計算が何度も必要なので，インピーダンス行列要素の数値計算時間が長くなっていることが分かる．数値補間法 (Interpolation) を用いると，ゾンマーフェルド積分の計算回数が少なくなるので，インピーダンス行列要素の数値計算時間が約 1/2400 になっている．さらに，MB-CBFM を用いると，行列方程式を解くための計算時間が短くなり，約 1/1000 になっている．以上のように，多層媒質のグリーン関数を用いたモーメント法に，数値補間法や MB-CBFM を適用すると，大規模なマイクロストリップアレーアンテナの数値解析が非常に高速に行えることが分かる．

4. む す び

本報告では，多層媒質のグリーン関数を用いたモーメント法を構築し，大規模なマイクロストリップアレーアンテナの数値解析を行ってその有効性を数値的に明らかにした．

謝 辞

また，本研究に関してアドバイスを頂いた東北大学サイバーサイエンスセンターに謝意を表する．本研究成果の一部は，JSPS 科研費 18K13736 の助成および東北大学電気通信研究所共同プロジェクト研究によるものである．

References

[1] B.A. Munk, Frequency Selective Surfaces Theory and Design, Jon Willey & Sons, 2000.

[2] M. Ohira, H. Deguchi, M. Tsuji, and H. Shigesawa, “Novel dual-resonant and dual-polarized frequency selective surface using eight-legged element and its experimental verification,” IEICE Trans. Electron., vol. E88-C, no. 12, pp. 2229-2235, Dec., 2005.

[3] Y. Konishi, “Phased array antennas,” IEICE Trans. Commun., vol. E86-B, no.3, pp. 954-967, March, 2003.

[4] M. Ando, “Planar waveguide arrays for millimeter wave systems,” IEICE Trans. Commun., vol. E93-B, no.10, pp. 2504-2513, Oct., 2010.

[5] W.C. Chew, J.L. Xiong, and M.A. Saville, “A matrix-friendly formulation of layered medium Green’s function,” IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., vol. 5, no. 1, pp. 490-494, Dec. 2006.

[6] Y.P. Chen, J.L. Xiong, and W.C. Chew, “A mixed-form thin-stratified medium fast-multipole algorithm for both low and mid-frequency problems,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 59, no. 6, pp. 2341-2349, June 2011.

[7] J.L. Xiong, Y. Chen, and W.C. Chew, “A quasi-3D thin-stratified medium fast-multipole algorithm for microstrip structures,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 59, no. 7, pp. 2578-2587, July 2011.

[8] Y.P. Chen, W.C. Chew, and L. Jiang, “A new Green’s function formulation for modeling homogeneous objects in layered medium,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 60, no. 10, pp. 4766-4776, Oct. 2012.

[9] V. V. S. Prakash and R. Mittra, “Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations,” Microw. Opt. Technol. Lett., vol. 36, no. 2, pp. 95-100, Jan. 2003.

[10] W. B. Lu, T. J. Cui, Z. G. Qian, X. X. Yin, and W. Hong, “Accurate analysis of large-scale periodic structures using an efficient sub-entire-domain basis function method,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 52, no. 11, pp. 3078-3085, Nov. 2004.

[11] P. Du, B.-Z. Wang, and H. Li, “An extended sub-entire domain basis function method for finite periodic structures,” IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., vol. 7, pp. 404-407, 2008.

[12] W. B. Lu, T. J. Cui, X. X. Yin, Z. G. Qian, and W. Hong, “Fast algorithms for large-scale periodic structures using subentire domain basis functions,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 52, no. 11, pp. 3078-3085, Nov. 2004.

[13] W. B. Lu, T. J. Cui, and H. Zhao, “Acceleration of fast multipole method for large-scale periodic structures with finite sizes using sub-entire-domain basis functions,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 55, no. 2, pp. 414-421, Feb. 2007.

[14] K. Konno, Q. Chen and R.J. Burkholder, “Fast Computation of Layered Media Green’s Function via Recursive Taylor Expansion,” IEEE Antennas and Wireless Propag. Lett., vol.16, pp.1048-1051, 2017.

[15] K. Konno, Q. Chen, and R.J. Burkholder, “Efficiency Improvement with a Recursive Taylor Expansion of Bessel Functions for Layered Media Green’s Function,” Proc. IEEE AP-S Int. Symp., TH-A3.2A.3, pp.1355-1356, July, 2017.

[16] K. Konno, Q. Chen and R.J. Burkholder, “Numerical Analysis of Large-Scale Finite Periodic Arrays Using a Macro Block-Characteristic Basis Function Method,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.65, no.10, Oct. pp.5348-5355, 2017.

[17] K. Konno and Q. Chen, “A Study of Novel Characteristic Basis Function Method for Numerical Analysis of Large-Scale Finite Planar Periodic Arrays,” Proc. ICCEM, WE-OP.4P.6, pp.1-2, March, 2018.

[18] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, “Optimization of block size for CBFM in MoM,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.60, no.10, pp.4719-4724, Oct. 2012.