

# 高次のCBFMを用いた誘電体近傍アンテナの数値解析

今野 佳祐<sup>†</sup> 陳 強<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 東北大学大学院 工学研究科 通信工学専攻 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05  
E-mail: †{konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし CBFM(Characteristic basis function method) は、大規模問題に対する高速モーメント法の1つとして知られている。CBFMは、ブロック単位で新たな基底関数(CBF, Characteristic basis function)を生成し、CBFを用いて行列を圧縮してから解くという手法である。これまで、3次のCBFを導入すると、CBFMの精度が上がる事が明らかにされているが、3次以上の高次のCBFを導入したCBFMの数値解析精度と計算時間は定量的に明らかにされていない。本報告では、高次のCBFMを用いて誘電体近傍アンテナを数値解析し、その精度と計算時間を明らかにする。  
キーワード モーメント法, CBFM

## Numerical Analysis of Antenna in the Vicinity of Dielectric Object by Higher-Order CBFM

Keisuke KONNO<sup>†</sup> and Qiang CHEN<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Communications Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University  
6-6-05 Aramaki Aza Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi, 980-8579, Japan  
E-mail: †{konno, chenq}@ecei.tohoku.ac.jp

**Abstract** CBFM (Characteristic Basis Function Method) is known as one of the fast MoM for analysis of large-scale problems. In the CBFM, characteristic basis function (CBF) is obtained in each block and the compressed matrix equation is solved after compression of the original matrix equation by the CBFs. In previous researches, it has been reported that the accuracy of the CBFM can be improved by introducing higher-order CBFM. However, the accuracy and computational complexity of the CBFM with higher-order CBFM has not been quantitatively reported so far. In this report, an antenna in the vicinity of the dielectric object is analyzed by the higher-order CBFM. Computational complexity and accuracy of the higher-order CBFM is evaluated.

**Key words** Method of moments (MoM), Characteristic basis function method (CBFM).

### 1. ま え が き

モーメント法 (Method of Moments, MoM) は有効な電磁界数値解析法の1つとして知られている [1], [2]. モーメント法では、アンテナや散乱体上の電流を未知とする積分方程式を行列方程式に変換し、行列方程式を解くことで未知の電流を得る。行列方程式の大きさはアンテナ及び散乱体の分割数  $N$  によって決まり、 $Z$  行列を求めるための時間は  $O(N^2)$ 、逆行列を求めて行列方程式を解くための時間は  $O(N^3)$  となる。従って、大規模な行列方程式をモーメント法で数値解析するには高速化が不可欠である。

モーメント法の高速化を図るために、これまでに様々な手法が提案されてきた。例えば、共役勾配 (Conjugate Gradient, CG) 法などの反復解法が、大規模な行列方程式を高速に解くために

有効であることが明らかにされている [3]- [6]. 反復解法は、適当に与えた近似解を更新することで厳密解に近付ける手法である。反復処理1回当たりの計算時間が  $O(N^2)$  であるため、反復回数が少なければ逆行列を求めるより高速に行列方程式を解くことができる。しかしながら、大規模な行列方程式は悪条件であることが多く、悪条件な行列方程式を反復解法で解く場合、必要な反復回数は  $N$  に比例することがある。従って、大規模問題において、反復解法は必ずしも高速な解法にはならない [7].

そこで、反復解法に依らずにモーメント法の高速化を図る手法として、CBFM(Characteristic Basis Function Method) が提案されてきた [8]. CBFMではまず、解析モデルを  $M$  個のブロックに、 $Z$  行列をそのブロックに対応する  $M^2$  個のブロック行列方程式に分割する。そして、ブロック行列方程式を解いて得られる  $M^2$  個の解にガラーキン法を適用し、 $N \times N$  の行列方

程式を  $M^2 \times M^2$  の行列方程式に圧縮してからその解を得る。圧縮後の行列サイズを抑えれば逆行列を得ることができるため、 $N$  が大きな場合でも反復解法に依らずに解を得られるという利点がある。

これまで、CBF の生成方法に関する検討 [9]- [11] や多層化による高圧縮率の実現 [12]- [15] など、CBFM に関する様々な研究が行われてきた。筆者らは、CBFM において最小の計算時間を与える  $M$  と  $N$  の関係を解析的に明らかにし、それを数値的に実証した [16]。また、筆者らは誘電体近傍アンテナの数値解析にはじめて CBFM を適用し、その精度とブロック分けとの関係を明らかにしてきた [17], [18]。筆者らのこれまでの研究で、誘電体近傍アンテナの数値解析に CBFM を適用する際、アンテナセグメントを異なるブロックに割り当てると、解の精度が大きく低下することが分かっている。そこで本報告では、誘電体近傍アンテナの数値解析における CBFM の精度を上げるため、文献 [19] で提案されている 3 次の CBFM を一般的に拡張した、高次の CBFM を提案する。そして、提案した高次の CBFM を用いて誘電体近傍アンテナの数値解析を行い、CBFM の次数と数値解析時間及び解の精度との関係を明らかにする。

## 2. CBFM

### 2.1 $L$ 次以上の高次の CBFM の原理

図 1 に示す板状アンテナの解析を例にとり、文献 [19] で示されている 3 次の CBFM を拡張した、 $L$  次の CBFM の原理を説明する。なお、従来の CBFM は 2 次の CBFM に相当する。 $L$  次の CBFM では、従来の CBFM と同様に、まず図 1 に示すように解析モデルを  $M$  個のブロックに分割する。そして、解析モデルの分割に対応するように  $Z$  行列を  $M^2$  個のブロックに分割し、電圧ベクトルと電流ベクトルはどちらも  $M$  個のブロックに分割する。なお、図 2 において、 $N$  は総セグメント数、 $M$  は解析モデルを分割したブロック数、 $K$  は各ブロック中におけるセグメント数、 $K_o$  は後述するブロック間のオーバーラップセグメント数である。また、 $Z_{ik}^b$  は  $i$  番目のブロックと  $k$  番目のブロック間の  $K \times K$  相互インピーダンス行列、 $\mathbf{V}_i^b$  と  $\mathbf{I}_i^b$  はそれぞれ  $K$  元のブロック電圧・電流ベクトルである。役割は後述するが、オーバーラップセグメントを含んだ拡張ブロック (Extended block) も CBF (Characteristic Basis Function) を求める過程で用いられ、通常ブロック行列と区別するために図中では上付き文字の  $e$  が付けられている。

さて、高次の CBFM では、 $M$  個の CBF に重み係数を乗じたものの和によって、各ブロック中に流れる電流を以下のように表す。

$$\mathbf{I}_i^b = \alpha_{(i,i)}^{l=1} \mathbf{J}_{(i,i)}^{b(l=1)} + \sum_{l=2}^L \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^M \alpha_{(i,k)}^l \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)} \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M \quad \text{where } L \geq 2)$$

ここで、 $\mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}$  は第  $i$  ブロックにおける  $k$  番目の  $l$  次 CBF であり、特に  $i = k$  で  $l = 1$  のとき Primary basis、 $i \neq k$  で  $l = 2$  のとき Secondary basis と呼ばれる。 $l > 3$  の CBF が高次の CBF である。また、 $\alpha_{(i,k)}^l$  はそれぞれの CBF に乗じる重み係数を表す。 $\mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}$  は、第  $i$  ブロックにおける電流のうち、第  $k$  ブロ

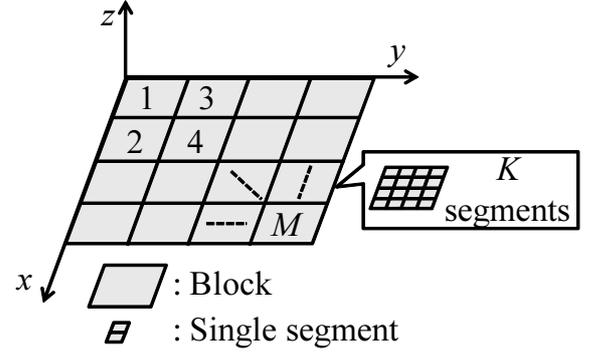


Figure 1 CBFM における板状アンテナのブロック分け。

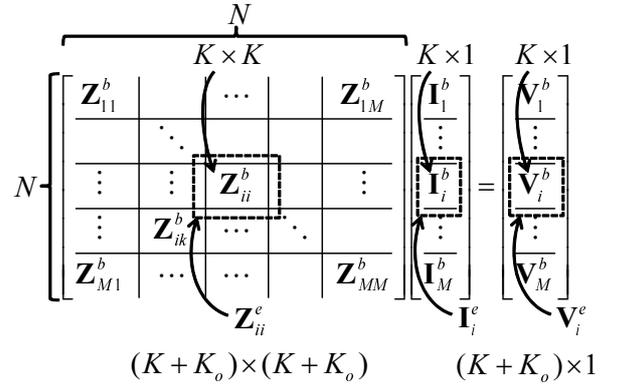


Figure 2 CBFM における行列方程式のブロック分け。

クの寄与による成分を表すという物理的な意味を持ち、 $\alpha_{(i,k)}^l$  は対応する CBF の寄与の大きさを示すものと解釈することができる。各ブロックを流れる電流を (1) 式のように表現することは、 $N$  個のセグメントに対応する電流係数を求めるという元の問題を、 $M^2$  個の CBF 及びその重み係数を求める問題に変換したことを意味している。以下では CBF と重み係数を求めて解を得るまでの手順を示す。

まず、全ブロックにおける Primary basis  $\mathbf{J}_{(i,i)}^{b(l=1)}$  を求める。Primary basis は、当該ブロック内に与えた電圧によって当該ブロック内に生じる電流を表しており、一般的には最も寄与の大きな CBF であることが多い。従って、Primary basis の精度は最終的な解の精度を左右すると考えられるが、ブロック行列方程式を解いて得られる Primary basis は、ブロックの周囲にあるセグメントとの連続性を無視することで生じる不要なエッジ効果を含んでおり、必ずしもその精度は良くない。そこで、不要なエッジ効果を除去した Primary basis を得るために、当該ブロック周囲にある  $K_o$  個のセグメントをオーバーラップセグメントとして導入した  $(K + K_o) \times (K + K_o)$  の拡張ブロック行列方程式 (2) を解く。

$$\mathbf{Z}_{ii}^e \mathbf{J}_{(i,i)}^{e(l=1)} = \mathbf{V}_i^e \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

そして、(2) 式を解いて得られる  $(K + K_o)$  元の解ベクトル  $\mathbf{J}_{(i,i)}^{e(l=1)}$  のうち、 $K_o$  個のオーバーラップセグメント部分に相当する成分を棄却し、残り  $K$  個の成分を Primary basis として保存する。オーバーラップセグメントはブロック間の電気的な連

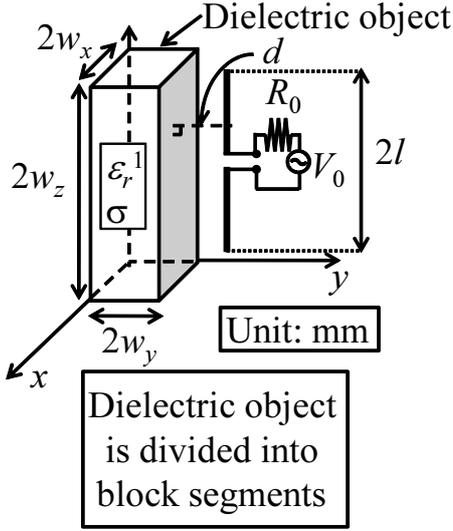


Figure 3 誘電体近傍線状ダイポールアンテナ.

続性を担保し、不要なエッジ効果を除去して Primary basis の精度を高める効果がある。その一方、オーバーラップセグメント数を大きくしすぎると計算時間が増大するという欠点がある。従って、オーバーラップセグメント数  $K_o$  は CBFM の精度と計算時間の両方に関わる重要なパラメータであると言える。なお、(2) 式を解く際に求めた逆行列は、Secondary basis 以降の CBF を求める箇所が必要になるため、ハードディスクに出力して保存しておく。

次に、Secondary basis を求める。Secondary basis は、他のブロックに与えた電圧によって当該ブロック内に生じる電流を表しており、以下のようなブロック行列方程式を解いて求める。

$$\mathbf{Z}_{ii}^e \mathbf{J}_{(i,k)}^{e(l=2)} = \mathbf{V}_{(i,k)}^e \quad \text{where} \quad \mathbf{V}_{(i,k)}^e = -\mathbf{Z}_{ik}^{e'} \mathbf{J}_{(k,k)}^{b'(l=1)} \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, M)$$

ここで、 $\mathbf{Z}_{ik}^{e'}$  は  $\mathbf{Z}_{ik}^e$  中の  $(K + K_o) \times K'$  ブロック行列であり、 $\mathbf{J}_{(k,k)}^{b'(l=1)}$  は Primary basis  $\mathbf{J}_{(k,k)}^{b(l=1)}$  中の  $K'$  成分からなるベクトルである。なお、第  $i$  ブロックと第  $k$  ブロック間のオーバーラップセグメント数を  $K_o^{ik}$  とすると、 $K' = (K - K_o^{ik})$  が成り立つ。Primary basis を求めるときと同様に、(3) 式を解いて得られる  $(K + K_o)$  元の解ベクトル  $\mathbf{J}_{(i,k)}^{e(l=2)}$  のうち、 $K_o$  個のオーバーラップセグメント部分に相当する成分を棄却し、残り  $K$  個の成分を Secondary basis として保存する。

そして、3 次以上の高次の CBF を求める。  $l$  次の CBF は、 $l-1$  次の CBF の和を用いて、以下の式から求める。

$$\mathbf{Z}_{ii}^e \mathbf{J}_{(i,k)}^{e(l)} = \mathbf{V}_{(i,k)}^e \quad \text{where} \quad \mathbf{V}_{(i,k)}^e = -\mathbf{Z}_{ik}^{e'} \sum_{\substack{k'=1 \\ k \neq k'}}^M \mathbf{J}_{(k,k')}^{b'(l-1)} \quad (4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, M)$$

このようにして各グループ毎に  $M_C = (l-1)(M-1) + 1$  個、計  $M * M_C$  個の CBF が得られるが、これらは必ずしも正規直交基底とはならない。そこで最後に、得られた CBF に

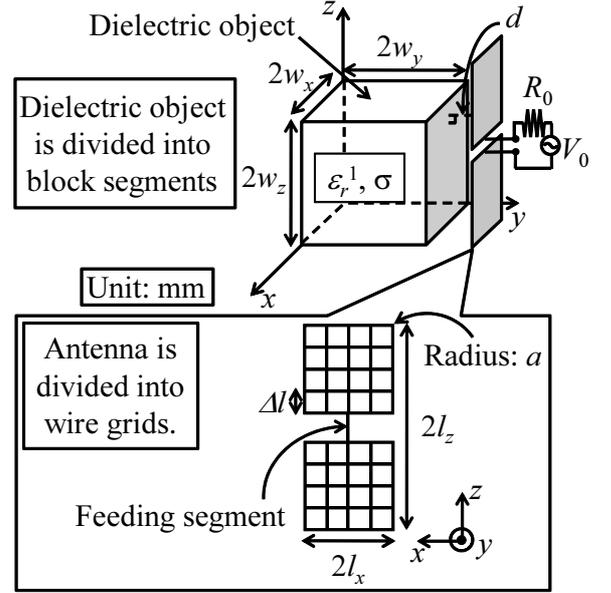


Figure 4 誘電体近傍板状ダイポールアンテナ.

Gram-Schmidt の正規直交化法を適用し、CBF の直交性を確保する。

次に、各 CBF の重み係数  $\alpha_{(i,k)}^l$  を求めるため、CBF によって元の行列方程式を以下のように変換する。

$$\sum_{i=1}^M \alpha_{(i,i)}^{l=1} \mathbf{u}_{(i,i)}^{l=1} + \sum_{l=2}^L \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \alpha_{(i,k)}^l \mathbf{u}_{(i,k)}^l = \mathbf{V} \quad (5)$$

$$(\mathbf{u}_{(i,k)}^l = [[\mathbf{Z}_{1i}^b \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}][\mathbf{Z}_{2i}^b \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}] \cdots [\mathbf{Z}_{Mi}^b \mathbf{J}_{(i,k)}^{b(l)}]]^T)$$

そしてガラーキン法を用い、(5) 式の両辺と  $(\mathbf{u}_{(q,r)}^l)^*$  との内積を取って、元の  $N \times N$  行列方程式を  $M * M_C \times M * M_C$  に圧縮する。  $M * M_C \leq N$  であれば圧縮した行列方程式のサイズは元の行列方程式よりも小さくなるので、Gauss-Jordan 法などを用いることで逆行列を計算して  $\alpha_{(i,k)}^l$  を求めることができる。最後に、得られた重み係数と CBF を (1) 式に代入すれば、元の行列方程式の解が求まる。

### 3. 数値解析

#### 3.1 解析モデル

図 3 と 4 に解析モデルを示す。誘電体はブロックダイポールセグメント及びブロックモノポールセグメントに分割した。図 5 及び 6 に示すように、ブロック各辺の両側を  $w_e$  ずつ拡張した範囲に含まれるセグメント数をオーバーラップセグメント数  $K_o$  と定義した。また、ここでは放射問題を取り扱うことにする。

#### 3.2 CBFM の次数と数値解析精度との関係

誘電体近傍線状ダイポールアンテナを従来の CBFM で数値解析して得られた入力リアクタンスを、図 7 に示す。図 7 から、オーバーラップ領域  $w_e$  を広げて CBF の質を上げたとしても、従来の 2 次の CBFM で得られる解は Full-wave とのずれが大きいことが分かる。CBFM で放射問題を数値解析する場合、オーバーラップ領域  $w_e$  を非常に大きくしない限り、給電セグメントを含むブロック以外では Primary basis が 0 になる。放射問題での給電セグメントは 1 つであることが多く、Secondary

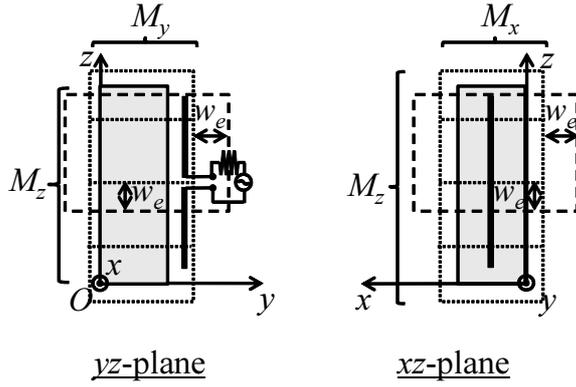


Figure 5 誘電体近傍線状ダイポールアンテナのブロック分け.

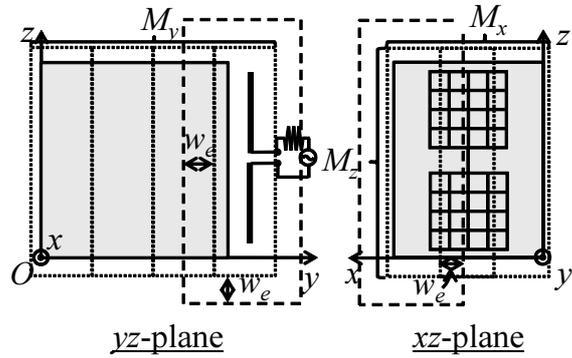


Figure 6 誘電体近傍板状ダイポールアンテナのブロック分け.

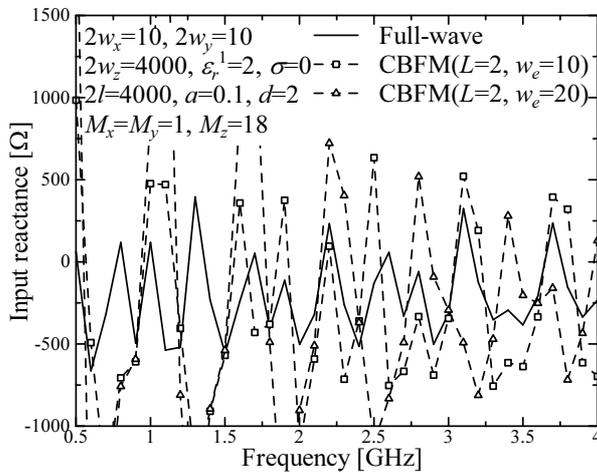


Figure 7 従来のCBFMによって得られた入力リアクタンス (誘電体近傍線状ダイポールアンテナ).

basis は Primary basis から計算されるので、2 次の CBFM において各ブロックが有する CBF は 1 つだけである。CBFM では、CBF と重み係数との積の重ね合わせで各ブロック内の電流を表現するため、高い精度の解を得るためには複数の CBF が必要である。従って、ほとんどのブロックで Primary basis が 0 となるような放射問題を 2 次の CBFM で数値解析すると、その解は大きな誤差を含む。オーバーラップ領域  $w_e$  を拡大し、全てのブロックで給電セグメントをオーバーラップすれば Primary basis は 0 にならないが、ブロック行列のサイズが大きくなり

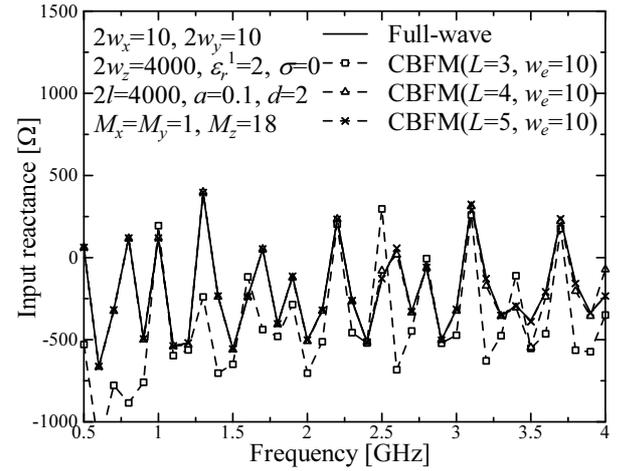


Figure 8 高次の CBFM によって得られた入力リアクタンス (誘電体近傍線状ダイポールアンテナ).

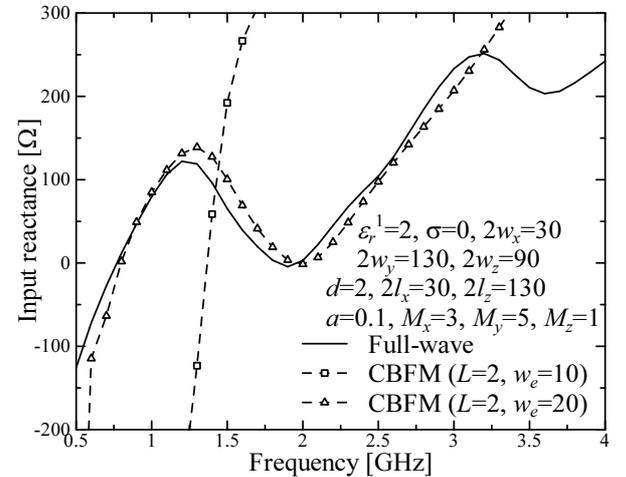


Figure 9 従来の CBFM によって得られた入力リアクタンス (誘電体近傍板状ダイポールアンテナ).

過ぎてしまい、高速化が図れなくなる。ゆえに、2 次の CBFM を用いて放射問題の解を高い精度で高速に得ることは困難である。一方、誘電体近傍線状ダイポールアンテナを高次の CBFM で数値解析して得られた入力リアクタンスを図 8 に示す。4 次以上の CBFM で得られた解は、Full-wave とほぼ一致していることが分かる。3 次以上の高次の CBFM では、各ブロックに複数の CBF が存在し、次数を上げるにつれてブロックあたりの CBF の数も大きくなる。ブロックあたりの CBF の数が大きくなると、ブロック内の電流を表す自由度が増し、解の精度が向上する。従って、高次の CBFM を用いると、ほとんどのブロックで Primary basis が 0 となるような放射問題でも高い精度で数値解析できると言える。

同様に、誘電体近傍板状ダイポールアンテナを CBFM で数値解析して得られた入力リアクタンスを図 9 及び 10 に示す。誘電体近傍線状ダイポールアンテナの数値解析結果と同じく、高次の CBFM によって得られた入力リアクタンスは Full-wave と概ね一致していることが分かる。

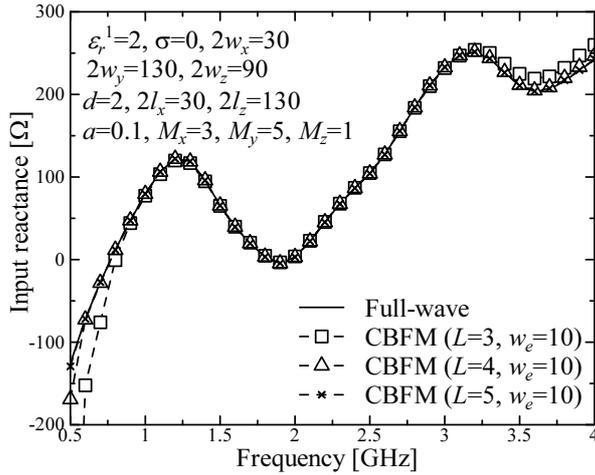


Figure 10 高次の CBFM によって得られた入力リアクタンス (誘電体近傍板状ダイポールアンテナ).

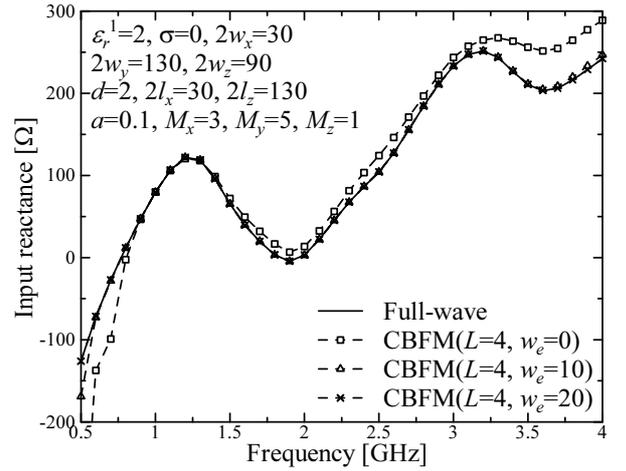


Figure 12 オーバーラップ領域  $w_e$  と 4 次の CBFM の精度との関係 (誘電体近傍板状ダイポールアンテナ).

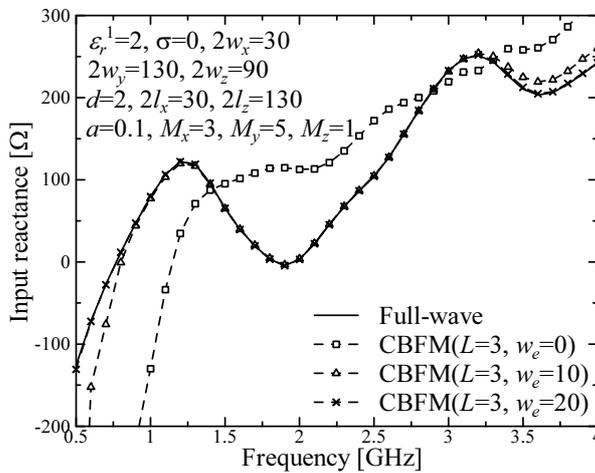


Figure 11 オーバーラップ領域  $w_e$  と 3 次の CBFM の精度との関係 (誘電体近傍板状ダイポールアンテナ).

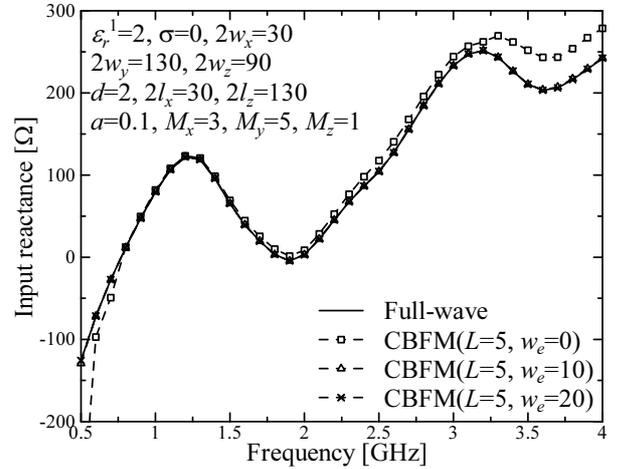


Figure 13 オーバーラップ領域  $w_e$  と 5 次の CBFM の精度との関係 (誘電体近傍板状ダイポールアンテナ).

### 3.3 オーバーラップ領域の大きさと高次の CBFM の精度との関係

ここでは、オーバーラップ領域の大きさ  $w_e$  と、高次の CBFM の精度との関係を議論する。誘電体近傍板状ダイポールアンテナを 3 次～5 次の CBFM で数値解析して得られた入力リアクタンスを図 11, 12 及び 13 にそれぞれ示す。図から分かるように、CBFM の次数が同じであれば、オーバーラップ領域  $w_e$  が大きい方が解の精度が高い。また、CBFM の次数が高くなると、オーバーラップ領域  $w_e$  が 0 あるいは小さくても、得られる解の精度が高いことが分かる。紙面の都合で割愛したが、誘電体近傍線状ダイポールアンテナの数値解析結果もほぼ同様の結果となった。

CBFM において、その次数は CBF の数、オーバーラップ領域  $w_e$  の大きさは CBF の質にそれぞれ対応する。低次の CBFM では、CBF の数が少なく、解を表現するための自由度が低い。従って、オーバーラップ領域  $w_e$  を大きくすることによって CBF の質を上げないと、解の精度が下がる。その一方、高次の CBFM ではもともと多くの CBF があるため、解を表現するための自由度が高い。従って、オーバーラップ領域  $w_e$  が 0 あるいは小さ

くても、解の精度は比較的高くなると考えられる。

### 3.4 高次の CBFM の数値解析時間

ここでは、CBFM の次数  $L$  及びオーバーラップ領域  $w_e$  と、その数値解析時間との関係を明らかにする。誘電体近傍線状ダイポールアンテナを高次の CBFM で数値解析するのに要した計算時間を表 1 に示す。同様に、誘電体近傍板状ダイポールアンテナを高次の CBFM で数値解析するのに要した計算時間を表 2 に示す。表 1 から、CBFM の次数  $L$  を上げると計算時間が大きくなるのが分かる。CBFM の次数  $L$  を上げると、行列方程式を圧縮するのに用いる CBF の数が増え、圧縮後の行列方程式のサイズもより大きくなる。従って、次数  $L$  を上げると、CBF を生成するのに要する時間、行列方程式を圧縮するのに要する時間、圧縮後の行列方程式を解くための時間が大きくなり、CBFM 全体の計算時間が大きくなる。

また、オーバーラップ領域  $w_e$  を大きくすると、計算時間が大きくなるのが分かる。そして、オーバーラップ領域  $w_e$  を大きくすることによる計算時間の増加は、誘電体近傍板状ダイポールアンテナの方が大きい。誘電体近傍線状ダイポールアンテナでは誘電体及びアンテナセグメントが 1 次元方向に分布してい

Table 1 高次 CBFM の数値解析時間 (誘電体近傍線状ダイポールアンテナ).

Methods	Size of reduced/ original matrix	CPU time [sec.]		
		$w_e = 0$	$w_e = 10$	$w_e = 20$
CBFM( $L = 2$ )	$18 \times 18$	119	205	236
CBFM( $L = 3$ )	$263 \times 263$	339	377	431
CBFM( $L = 4$ )	$525 \times 525$	638	719	797
CBFM( $L = 5$ )	$785 \times 785$	1041	1191	1301
Full-wave	$7235 \times 7235$	16632		

Table 2 高次 CBFM の数値解析時間 (誘電体近傍板状ダイポールアンテナ).

Methods	Size of reduced/ original matrix	CPU time [sec.]		
		$w_e = 0$	$w_e = 10$	$w_e = 20$
CBFM( $L = 2$ )	$15 \times 15$	42	146	572
CBFM( $L = 3$ )	$115 \times 115$	62	179	643
CBFM( $L = 4$ )	$223 \times 223$	90	226	740
CBFM( $L = 5$ )	$319 \times 319$	128	291	842
Full-wave	$3760 \times 3760$	1592		

るため、 $w_e$  を大きくしてもオーバーラップセグメント数はさほど増えない。その一方で、誘電体近傍板状ダイポールアンテナでは誘電体及びアンテナセグメントがそれぞれ 3 次元、2 次元方向に分布しているため、 $w_e$  を大きくするとオーバーラップセグメント数が非常に大きくなる。従って、オーバーラップ領域  $w_e$  を大きくすることによる計算時間の増加は、誘電体近傍板状ダイポールアンテナの方が大きくなる。

本節の議論と前節における数値解析の精度の議論を踏まえると、Full-wave に近い精度を保ちながら高速化を実現するためには、 $L = 4$ ,  $w_e = 10$  程度で CBFM を実行するのが望ましいと考えられる。

#### 4. む す び

本報告では、一般的な高次の CBFM を提案した。そして、高次の CBFM を用いて誘電体近傍アンテナの数値解析を行い、CBFM の次数及びオーバーラップ領域の大きさと、解の精度及び計算時間との関係を明らかにした。CBFM によって得られる解の精度は、CBFM の次数が高く、オーバーラップ領域が大きいほど良くなることが分かった。その一方で、CBFM の次数が高く、オーバーラップ領域が大きいと計算時間がかかるため、CBFM の次数とオーバーラップ領域は最適な値にする必要があることも分かった。

#### 謝 辞

本研究は、総務省委託研究「災害時に有効な衛星通信ネットワークの研究開発」の一環として実施された。また、本研究の遂行過程で、東北大学サイバーサイエンスセンター大規模科学計算システムを利用した。

#### References

[1] R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York, Macmillan, 1968.  
 [2] J.H. Richmond and N.H. Greay, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," *IEEE Trans. Antennas*

and Propag., vol.23, no.5, pp.412-414, May 1975.  
 [3] Q. Chen, Q. Yuan, and K. Sawaya, "Fast algorithm for solving matrix equation in MoM analysis of large-scale array antennas," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E85-B, no.11, pp.2482-2488, Nov. 2002.  
 [4] Q. Chen, Q. Yuan, and K. Sawaya, "Convergence of SOR in MoM analysis of array antenna," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E88-B, no.5, pp.2220-2223, May 2005.  
 [5] T.K. Sarker and S.M. Rao, "The application of the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic scattering from arbitrarily oriented wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.32, no.4, pp.398-403, April 1984.  
 [6] T.K. Sarker, "The conjugate gradient method as applied to electromagnetic field problems," *IEEE Antennas Propagation Society Newsletter*, vol.28, no.4, pp.4-14, Aug. 1986.  
 [7] K. Konno, Q. Chen, and K. Sawaya, "Quantitative evaluation for computational cost of CG-FMM on typical wire-grid models," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E93-B, no.10, pp.2611-2618, Oct. 2010.  
 [8] V.V.S. Prakash and R. Mittra, "Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol.36, no.2, pp.95-100, Janu. 2003.  
 [9] G. Tiberi, M. Degiorgi, A. Monorchio, G. Manara, and R. Mittra, "A class of physical optics-SVD derived basis functions for solving electromagnetic scattering problems," *Proc. IEEE AP-S Int. Symp.*, pp. 143-146, July 2005.  
 [10] M. Degiorgi, G. Tiberi, A. Monorchio, G. Manara, and R. Mittra, "An SVD-based method for analyzing electromagnetic scattering from plates and faceted bodies using physical optics bases," *Proc. IEEE AP-S Int. Symp.*, pp. 147-150, July 2005.  
 [11] E. Lucente, A. Monorchio, and R. Mittra, "An iteration-free MoM approach based on excitation independent characteristic basis functions for solving large multiscale electromagnetic scattering problems," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol.56, no.4, pp. 999-1007, April 2008.  
 [12] C. Delgado, F. Catedra, and R. Mittra, "A numerically efficient technique for orthogonalizing the basis functions arising in the solution of electromagnetic scattering problems using the CBFM," *Proc. IEEE AP-S Int. Symp.*, pp. 3608-3610, July 2007.  
 [13] C. Delgado, M.F. Catedra, and R. Mittra, "Efficient multilevel approach for the generation of characteristic basis functions for large scatters," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol.56, no.7, pp.2134-2137, July 2008.  
 [14] C. Delgado, E. Garcia, F. Catedra, and R. Mittra, "Generation of characteristic basis functions defined over large surfaces by using a multilevel approach," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol.57, no.4, pp. 1299-1301, April 2009.  
 [15] J. Laviada, F. Las-Haras, M.R. Pino, and R. Mittra, "Solution of electrically large problems with multilevel characteristic basis functions," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol.57, no.10, pp. 3189-3198, Oct. 2009.  
 [16] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, "Optimization of block size for CBFM in MoM," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.60, no.10, pp.4719-4724, Oct. 2012.  
 [17] K. Konno, Q. Chen, K. Sawaya, and T. Sezai, "Analysis of linear antenna near dielectric object by CBFM," *Proc. IEEE AP-S Int. Symp.*, 263, pp.1-2, July 2012.  
 [18] K. Konno, Q. Chen, and K. Sawaya, "Optimum Block Division in CBFM for Fast MoM," *Proc. IEICE Int. Symp. Antennas Propag.*, 3D1-1, pp.910-913, Oct.-Nov. 2012.  
 [19] S.G. Hay, J.D. O'Sullivan, and R. Mittra, "Connected patch array analysis using the characteristic basis function method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.59, no.6, pp.1828-1837, June 2011.