

## CG-FMMによる板状アンテナの解析

今野 佳祐<sup>†</sup> 陳 強<sup>†</sup> 澤谷 邦男<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 東北大学大学院 工学研究科 電気通信工学専攻 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05  
E-mail: †{konno, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

**あらまし** 大規模問題を解析するための高速なモーメント法の1つとしてCG-FMM(Conjugate Gradient-Fast Multipole Method)が知られており、未知数を $N$ とすれば反復処理1回の計算時間及び計算機メモリをどちらも $O(N^2)$ から $O(N^{1.5})$ まで削減することができると言われている。しかしながら、計算時間及び計算機メモリの削減効果はグループ数に依存することが知られており、その検討は必ずしも十分ではない。本報告では、作成したCG-FMMの汎用プログラムを利用して板状導体を解析し、グループ分けの仕方と計算時間及び計算機メモリの関係を検討したので報告する。

**キーワード** モーメント法, 高速多重極法, 共役勾配法.

## Analysis of Planar Antenna by CG-FMM

Keisuke KONNO<sup>†</sup>, Qiang CHEN<sup>†</sup>, and Kunio SAWAYA<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Electrical Communications Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University, 6-6-05 Aramaki Aza Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi, 980-8579, Japan  
E-mail: †{konno, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

**Abstract** CG-FMM(Conjugate Gradient-Fast Multipole Method) is known as one of the fast Method of Moments(MoM) for large-scale problems. Both CPU time and computer memory for analysis of the CG-FMM are considered to be reduced from  $O(N^2)$  to  $O(N^{1.5})$  where  $N$  is number of unknowns. However, effect of number of groups, which is one of the important parameters for computational efficiency of the CG-FMM, have not been sufficiently investigated. In this report, versatile program of the CG-FMM is used for analysis of scattering characteristics of the planar antenna and the computational efficiency corresponding to number of groups is investigated.

**Key words** Method of moments (MoM), Fast multipole method (FMM), Conjugate gradient (CG).

### 1. ま え が き

アンテナの電磁界解析手法の1つとしてモーメント法(Method of Moments: MoM)が挙げられる[1], [2]. モーメント法は、導体表面上で成り立つ電磁界の境界条件から得られる積分方程式を離散化し、行列方程式に変換してこれを解き、導体表面を流れる未知の電流を求める手法である。従来はガウス消去法や掃き出し法などを用いて、行列方程式 $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ を直接解いて未知の電流ベクトル $\mathbf{I}$ を求める際にガウス消去法や掃き出し法などの直接法が用いられていた。しかし、 $N \times N$ の行列方程式を直接法を用いて解くと計算時間とメモリがそれぞれ $N^3$ と $N^2$ に比例して増加する。そのため、大規模な構造にモーメント法を適用するには、計算の高速化及び必要なメモリの低減が不可欠である。

この課題を克服する手法として、行列方程式の解法にCG(Conjugate Gradient)法[3]-[6]を用い、CG法における行

列ベクトル積の計算にFMM(Fast Multipole Method; 高速多重極法)を用いるCG-FMM[7]-[9]や、CG法中の行列ベクトル積の計算を高速フーリエ変換で高速化したCG-FFT(Conjugate Gradient-Fast Fourier Transform)[17]、 $Z$ 行列の遠方界成分を周期的に配置した点状基底関数を用いて計算するAIM(Adaptive Integral Method)[18]-[21]などが提案された。一般に、CG-FMMの1ステップあたりの計算時間及び必要なメモリはどちらも $N^{1.5}$ に比例するが、 $N$ が大きくなければ効率は良くならない。また、CG-FFTの1ステップ当たりの計算時間は $N \log N$ で、必要なメモリは $N$ に比例するが、周期構造にしか適用できないという欠点がある。さらに、AIMでは1ステップ当たりの計算時間及び必要なメモリはそれぞれ $N^\alpha \log N$ ,  $N^\alpha$  ( $1 < \alpha < 1.5$ )に比例するが、解析モデルを一樣な長方形格子で分割すること(階段近似)による誤差が大きい。

これらの手法の中でもCG-FMMに関しては様々な研究がなされ、改良や大規模問題の解析が行われてきた。CG-FMMに分

割統治法の考え方を応用して多層化した MLFMA (Multi-Level Fast Multipole Algorithm) [10]- [16] に代表される手法は、飛行機 [11] やレンズ [16] などの大規模問題の解析に用いられ、並列コンピュータ用のアルゴリズムの開発 [15] も行われた。しかしながら、CG-FMM の計算時間及び計算機メモリはグループ数に大きな影響を受けることが知られており、その検討は十分になされているとは言えない。

本報告では、CG-FMM の汎用プログラムを利用して板状アンテナによる平面波の散乱界を解析し、グループ数と計算時間及び計算機メモリの関係を検討したので報告する。

## 2. 数値解析の原理

### 2.1 CG 法

モーメント法によって得られた行列方程式  $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$  を CG 法によって解くアルゴリズムの概要は以下の通りである。

●電流ベクトル  $\mathbf{I}$  の初期値を  $\mathbf{I}_0$  として、残差ベクトル  $\mathbf{R}$  及び解の修正ベクトル  $\mathbf{P}$  の初期値  $\mathbf{R}_0$  及び  $\mathbf{P}_0$  をそれぞれ以下のようにして求める。

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{Z}\mathbf{I}_0$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{R}_0$$

●残差ベクトルの大きさ  $\|\mathbf{R}_i\|$  が十分小さくなるまで反復処理

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{Z}\mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{R}_{i-1} \rangle}{\|\mathbf{Z}\mathbf{P}_{i-1}\|^2} = \frac{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{R}_{i-1}\|^2}{\|\mathbf{Z}\mathbf{P}_{i-1}\|^2}$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{P}_{i-1}$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{V} - \mathbf{Z}\mathbf{I}_i = \mathbf{R}_{i-1} - \alpha_i \mathbf{Z}\mathbf{P}_{i-1}$$

If  $\|\mathbf{R}_i\| < \epsilon \|\mathbf{V}\|$ , stop iteration.

$$\beta_i = \frac{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{R}_i\|^2}{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{R}_{i-1}\|^2}$$

$$\mathbf{P}_i = -\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{R}_i + \beta_i \mathbf{P}_{i-1}$$

を行う。ここで、 $\alpha_i$  と  $\beta_i$  はそれぞれ  $\mathbf{I}_{i-1}$  と  $\mathbf{P}_{i-1}$  の修正係数であり、 $\mathbf{Z}^\dagger$  は  $\mathbf{Z}$  の共役転置行列である。また、 $\epsilon$  は解の誤差調整パラメータであり、 $\epsilon = 10^{-4}$  とすれば  $N$  が数千から数万程度までは十分な精度の解が得られることが分かっている。

上述のアルゴリズムでは、反復処理 1 回当たり 2 回の行列-ベクトル積が行われ、その計算時間は  $O(N^2)$  である。また、 $\mathbf{Z}$  を保存するための計算機メモリも  $O(N^2)$  となる。2.2 節で述べるように、FMM を利用すると行列-ベクトル積の計算時間及び必要な計算機メモリをどちらも最大で  $O(N^{1.5})$  まで減らすことが出来る。

### 2.2 FMM

図 1 に示すように、FMM ではグリーン関数の加法定理 [7], [22] を利用して、CG 法の行列-ベクトル積のうち遠方にあるセグメントとの間の相互インピーダンス行列と電流ベクトル  $\mathbf{I}$  との積をグループ単位でまとめて計算する。まとめるときの計算時間及び必要な計算機メモリは、多重極数  $L$  とグループ数  $M$ 、及び

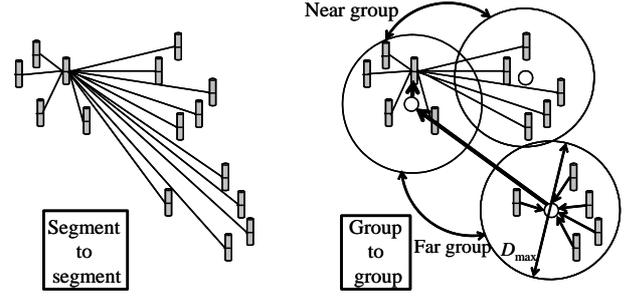


Figure 1 FMM におけるグループ化。

グループ中のセグメント数  $K$  によって決まることが分かっている。多重極数  $L$  はグループの直径の最大値  $D_{\max}$  に比例する値として、

$$L = k_0 D_{\max} + \alpha_L \ln(k_0 D_{\max} + \pi) \quad (1)$$

で与えられる経験式が得られている。ここで、 $\alpha_L$  は誤差調整パラメータであり、通常 0~10 の値が用いられ、 $\alpha_L = 2$  とすれば散乱パターンや電流分布は十分な精度で求められることが分かっている。解析モデルが 2 次元的な広がりを持つ場合 (板状アンテナなど)、多重極数  $L$  と各グループに含まれるセグメント数  $K (= N/M)$  との関係は  $L^2 \propto K$  となることが知られている。この場合、解析に要する計算時間と計算機メモリは総セグメント数  $N$  とグループ数  $M$  のみを用いて

$$\text{CPU time, computer memory} = O(MN + N^2/M) \quad (2)$$

で表される。(2) 式においてグループ数  $M$  を  $M = \sqrt{N}$  とすると計算時間及び計算機メモリが最小の  $O(N^{1.5})$  となる。しかしながら、解析モデルの形状やセグメントの分布の仕方によっては  $M = \sqrt{N}$  という最適なグループ分けができない場合もある。また、プログラム中で解析モデルやグループ配置の周期性を利用した場合、計算時間や計算機メモリが最小になるグループ数  $M$  が  $M = \sqrt{N}$  と異なる場合もあり得る。従って、グループ数に対する計算時間及び計算機メモリの変化を確かめる必要がある。そこで、グループ数を自由に設定して解析が行えるようなプログラムを作成し、グループ数  $M$  を変化させたときの計算時間とメモリについて検討した。

## 3. CG-FMM による散乱問題解析プログラム

線状導体で構成された任意形状のアンテナや散乱体を分割し、自動的にグループ化を行った上で CG-FMM を利用して散乱問題を解析する手順は以下のようになる。

- (1) 解析モデルを線状セグメントに分割する。
- (2) 給電条件から各セグメント上の電圧を求め、電圧ベクトル  $\mathbf{V}$  を計算する。
- (3) 解析モデルを含む空間を、均一な大きさの立方体で分割し、グループを設定する。
- (4) (1) で求めたセグメント座標を (3) で求めたグループに割り当てる。
- (5) CG-FMM を利用して、各セグメントの電流分布を計算する。
- (6) 得られた電流分布を利用して散乱パターンを得る。

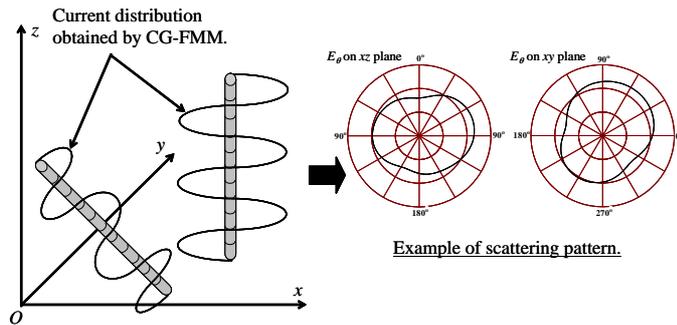
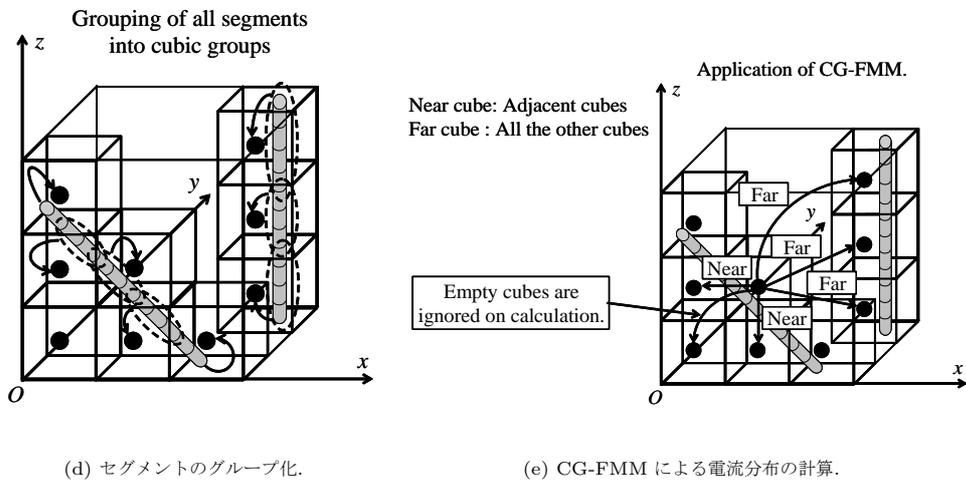
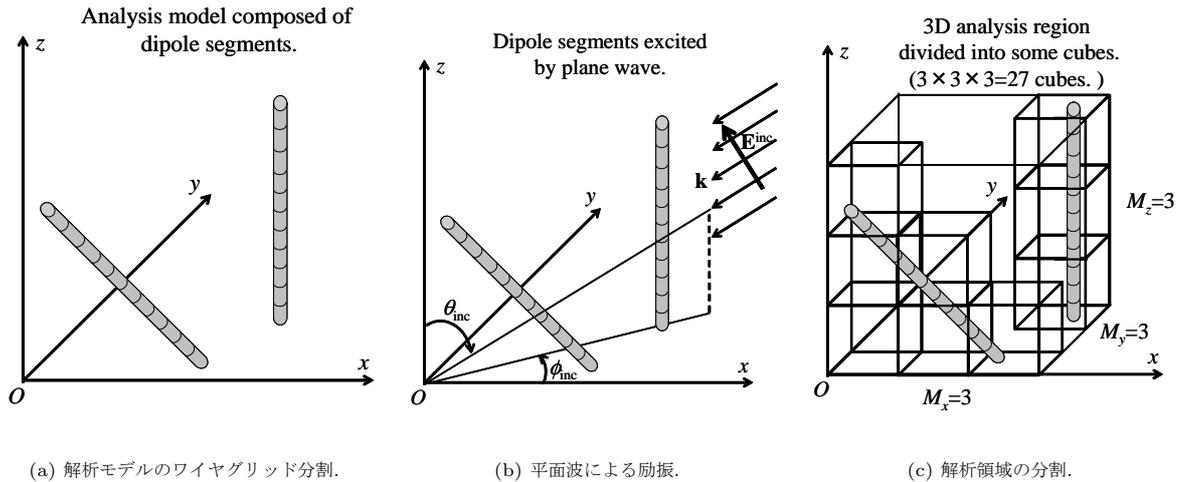


Figure 2 CG-FMM による散乱問題の解析手順.

解析モデルのセグメント分割には何らかの商用ソフトウェアを利用することもできる。また、各グループへのセグメントの割り当てには選択ソートを使用しており、各グループに含まれるセグメント数は均一ではない。そして CG-FMM によって電流分布を計算する際には、隣接しないグループ間の相互インピーダンスのみを FMM によって計算する。図 2(a)-2(f) に、2 本のダイポールアンテナを解析モデルとした場合に、モデルの分割から散乱パターンが得られるまでの様子を示す。

#### 4. CG-FMM による板状アンテナの解析.

以上のプログラムを利用して、図 3 に示す板状アンテナを CG-FMM によって解析する。解析諸元は表 1 に示す。板状アンテナの寸法と線状セグメントへの分割及び総セグメント数  $N$  を固定し、グループ数の違いが計算時間及び計算機メモリに及ぼす影響を検討した。また、多重極数  $L$  を決定するパラメータ  $\alpha_L$ 、及び反復回数を決定するパラメータ  $\epsilon$  も固定した。散乱パ

ターンの解析結果の一例を図4に示す. Gauss-Jordan 法やCG法によって行列方程式を解いて得られた電流分布から求めた散乱パターンと, CG-FMMによって得られた電流分布から求めた散乱パターンはよく一致した. 次に, CG法及びCG-FMM

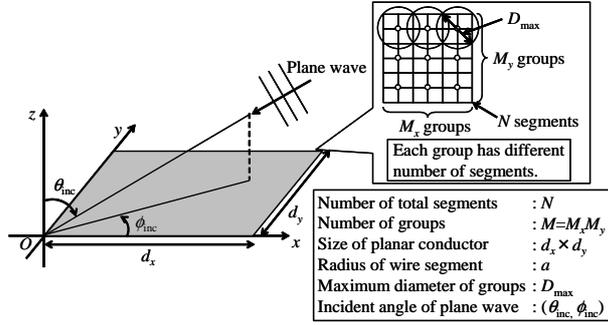


Figure 3 板状アンテナ.

Table 1 解析諸元.

Number of total segments $N$	4879
Number of cubes $(M_x, M_y, M_z)$	$M_x = M_y = 2 \sim 17$ $M_z = 1$
Number of total groups $M = M_x M_y M_z$	4 ~ 289
Max. number of segments in groups $K_{\max}$	1281 ~ 27
Size of planar conductor $d_x \times d_y$	$4\lambda \times 4\lambda$
Radius of dipole segment $a$	$0.00025\lambda$
Incident angle of plane wave $(\theta_{\text{inc}}, \phi_{\text{inc}})$	$(30^\circ, 45^\circ)$
Error control parameter for FMM $\alpha_L$	2
Error control parameter to stop iteration $\epsilon$	$10^{-4}$

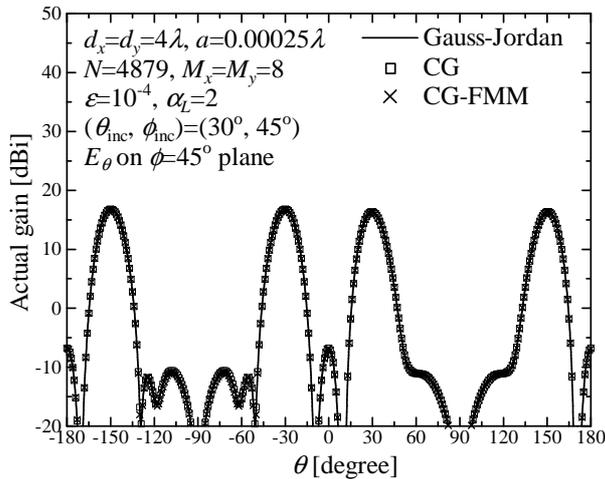


Figure 4 板状アンテナの散乱パターン.

における反復1回当たりの計算時間及び反復回数を図5に示す. なお, 比較のためCG法で板状アンテナを解析するのに要した反復1回当たりの計算時間及び反復回数を図中に示してある. CG法にはグループ分けの概念がないため, 図中にはどちらの値もグループ数に依らない一定値として示してある. 図5によると, 反復1回当たりの計算時間は  $M = 50 \sim 200$  の間で最小値に近い値を示している. 理論的に最小値を示すと予想され

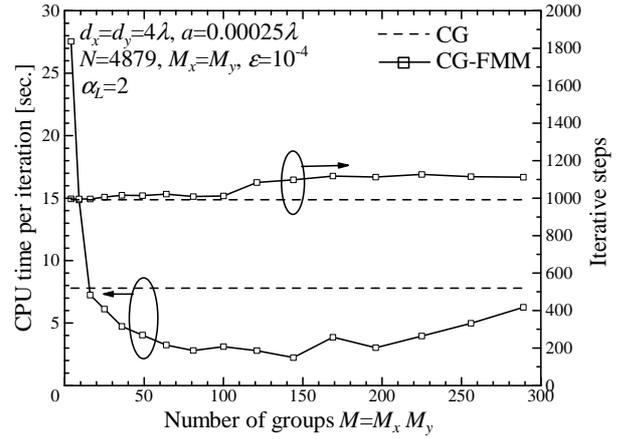


Figure 5 反復1回当たりの計算時間及び必要な反復回数.

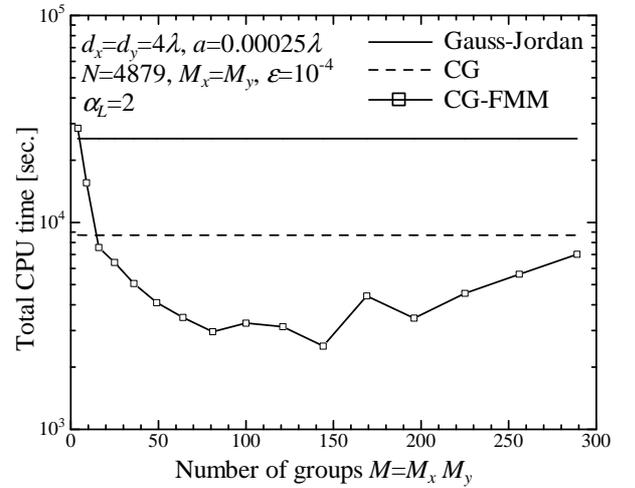


Figure 6 総計算時間.

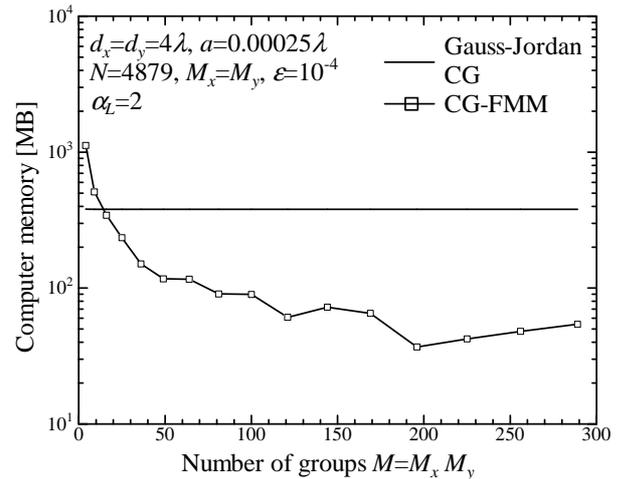


Figure 7 計算機メモリ.

る  $M = \sqrt{N} = 70$  程度の場合だけでなく, その前後のグループ数ならばかなり小さい計算時間が実現できていることが分かる. 従って, グループ数が  $M = \sqrt{N}$  からずれた場合でも, 計算時間が大幅に悪化することはないと言える. また, CG-FMMの反復回数はCG法の反復回数よりも常に大きな値を示し, グループ数  $M$  の増加に伴って多少増加する傾向が見られた.  $Z$  行列

中のインピーダンスのうち、どのインピーダンスが厳密・あるいは近似的に計算されるかどうかは、グループ数に対応して変化する。そして近似的に計算されたインピーダンスには誤差が含まれ、厳密に計算したインピーダンスと異なる値になる。従って、グループ数の変化は、若干ではあるが  $Z$  行列の変化をもたらす、異なる  $Z$  行列から CG 法によって解を得るために必要な反復回数は異なるため、 $M$  の増加に対して反復回数が増えたものと考えられる。

次に、CG-FMM の総計算時間を図 6 に示す。比較のために、Gauss-Jordan 法及び CG 法で板状アンテナを解析するのに要した時間も示している。図 6 から分かるように、 $M = \sqrt{N} = 70$  前後のグループ数にした場合、総計算時間が最小値に近い値になった。また、グループ数  $M$  が  $M = \sqrt{N} = 70$  よりも極端に大きかったり小さかったりする場合は、計算時間が CG 法と比較してあまり削減されないことも分かる。

最後に、計算機メモリを図 7 に示す。計算機メモリは、グループ数  $M$  が  $M = \sqrt{N} = 70$  付近で必ずしも最小にならず、 $M = 200$  前後で最小値に近い値となっている。その原因としては、グループ配置の周期性をプログラム中で利用したことと、各グループに含まれるセグメント数が一定でないことの 2 つが考えられる。グループ配置の周期性をプログラムで利用すると、計算機メモリは (2) 式と異なり、

$$\text{CPU time, computer memory} = O(N + N^2/M) \quad (3)$$

で表されることが分かっている。(3) 式は、グループ数  $M$  を  $N$  に近づけるほど計算機メモリは  $O(N)$  に近づくということを意味している。従って、この場合は  $M = \sqrt{N}$  が計算機メモリの最小値を与えるグループ数ではないことが分かる。

また、各グループの情報を保存するための計算機メモリ領域はプログラムの都合上、最大のセグメント数を持つグループに合わせて確保している。従って、各グループに含まれるセグメント数に大きな差がある場合 (1 グループだけ極端に多数のセグメントを含む場合など)、計算では使用しない無駄な計算機メモリを確保してしまうことになる。ゆえに、各グループに含まれるセグメント数をなるべく均一にするようなグループ分けの方が効率が良いと考えられる。

## 5. むすび

本報告では、CG-FMM を利用して、線状導体で構成された任意形状モデルの散乱問題を解析する手順について説明した。次に、板状の散乱導体をワイヤグリッドに分割し、その総数を  $N = 5000$  程度にしたときの解析を作成したプログラムを利用して行った。その結果、CG-FMM による解析に要する反復 1 回当たりの計算時間及び総計算時間はグループ数  $M = \sqrt{N}$  付近で最小値に近い値を示し、グループ数が  $M = \sqrt{N}$  からずれた場合でも CG 法より高速に解析ができることが分かった。また、必要な反復回数はグループ数に対して変化した。計算機メモリは、プログラム中でグループの配置に周期性を利用したため、 $M = \sqrt{N}$  ではなく  $M$  が  $N$  に近づいたときに最小値になることが分かった。加えて、各グループに含まれるセグメント数にばらつきがないようにすると、不要なメモリ領域を確保せずに済むことも分かった。

作成したプログラムは板状アンテナ以外の線状導体で構成された任意形状モデルの解析にも応用できるため、今後は市販のセグメント分割用ソフトウェアと組み合わせて、任意形状の大型モデルの解析を行う予定である。また、作成したプログラムに前処理を追加して、 $Z$  行列の条件数が大きい悪条件問題に対しても高速で解を得ることができるようになる必要がある。

## References

- [1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.
- [2] J. H. Richmond and N. H. Greay, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 23, No.5, pp. 412-414, May. 1975.
- [3] T.K. Sarker and S.M. Rao, "The application of the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic scattering from arbitrarily oriented wire antennas," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.32, no.4, pp.398-403, April 1984.
- [4] T.K. Sarker, "The conjugate gradient method as applied to electromagnetic field problems," IEEE Antennas Propagation Society Newsletter, vol.28, no.4, pp.4-14, Aug. 1986.
- [5] M.R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of Conjugate gradients for Solving Linear systems," J.Res. Nat. Bur. Standards. vol.49, no.6, pp.409-436, Dec. 1952.
- [6] J. Tang, Numerical Aspects of Iterative Solving of Linear Systems derived from Helmholtz's Problem, Literature Report of Delft University of Technology, Feb. 2004.
- [7] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Antennas and Propagat. Mag. vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.
- [8] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimension," J. Comput. Phys., vol.86, no.2, pp.414-439, Feb. 1990.
- [9] 瀬在俊浩, 久田安正, ザイ・フイチン, 陳強, 澤谷 邦男, "CG-FMM-FFT 法によるモーメント法の高速化・メモリ低減化," 信学技報, SPS2007-05, pp.7-14, July 2007.
- [10] J.M. Song and W.C. Chew, "Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," Microw. Opt. Technol. Lett., vol.10, no.1, pp.14-19, Sept. 1995.
- [11] J.M. Song, C.C. Lu, and W.C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.45, no.10, pp. 1488-1493, Oct. 1997.
- [12] X.Q. Sheng, J.M. Jin, J.M. Song, W.C. Chew, and C.C. Lu, "Solution of combined-field integral equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.46, no.11, pp.1718-1726, Nov. 1998.
- [13] K.C. Donepudi, J.M. Song, J.M. Jin, G. Kang, and W.C. Chew, "A novel implementation of multilevel fast multipole algorithm for higher order galerkin's method," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.48, no.8, pp.1192-1197, Aug. 2000.
- [14] S. Ohnuki, and W.C. Chew, "Numerical accuracy of multipole expansion for 2-D MLFMA," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.51, no.8, pp.1883-1890, Aug. 2003.
- [15] S. Velamparambil, and W.C. Chew, "Analysis and performance of a distributed memory multilevel fast multipole algorithm," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.53, no.8, pp.2719-2727, Aug. 2005.
- [16] J. Fostier, and F. Olyslager, "A grid computer implementation of the multilevel fast multipole algorithm for full-wave analysis of optical devices," IEICE Trans. Commun., vol.E90-B, no.9, pp.2430-2438, Sept. 2007.
- [17] Huiqing Zhai, Qiang Chen, Qiaowei Yuan, Kunio Sawaya,

- Changhong Liang, "Analysis of large-scale periodic array antennas by CG-FFT combined with equivalent sub-array preconditioner," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E89-B, no.3, pp.922-928, March 2006.
- [18] E. Bleszynski, M. Bleszynski, and T. Jaroszewicz, "AIM: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems," *Radio Science*, vol.31, pp.1225-1251, Sept.-Oct. 1996.
- [19] F. Ling, C. Wang, and J.M. Jin, "An efficient algorithm for analyzing large-scale microstrip structures using adaptive integral method combined with discrete complex-image method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.48, no.5, pp.832-838, May 2000.
- [20] W.B. Ewe, L.W. Li, and M.S. Leong, "Fast solution of mixed dielectric/conducting scattering problem using volume-surface adaptive integral method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.52, no.11, pp.3071-3077, Nov. 2004.
- [21] O.S. Kim, and P. Meincke, "Adaptive integral method for higher order method of moments," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.56, no.8, pp.2298-2305, Aug. 2008.
- [22] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1972.